Rezolvarea unor ecuaţii folosind proprietăţi ale funcţiilor reale

Prof. Lung Ioan

C.N. ,,Teodor Neş" SALONTA

O clasă importantă de probleme se referă la rezolvarea ecuaţiilor folosind unele proprietăţi ale funcţiilor. Vom trece în revistă în continuare câteva idei legate de această temă.

1. Folosirea monotoniei

P_1. *Fie* $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ *şi ecuaţia* $f(x) = g(x)$. *Dacă una dintre funcţii este strict crescătoare şi cealaltă este strict descrescătoare, sau invers, atunci ecuaţia are cel mult o soluţie.*

Dacă, în plus, există $x_0 \in D$ *astfel încât* $f(x_0) = g(x_0)$ *atunci* x_0 *este singura soluţie a ecuaţiei.*

În particular, dacă funcţia f este strict monotonă şi g este constantă, atunci ecuaţia are cel mult o soluţie.

2. Folosirea inversabilităţii

P_2. *Dacă funcţia* $f : A \to B$ *este inversabilă,* $A, B \subset \mathbb{R}$, *atunci* G_f *şi* $G_{f^{-1}}$ *sunt simetrice faţă de prima bisectoare a axelor de coordonate (*G_f *este graficul funcţiei* f*).*

P_3. *Dacă* $A, B \subset \mathbb{R}$ *şi funcţia* $f : A \to B$ *este inversabilă şi (strict) crescătoare, atunci ecuaţiile* $f(x) = f^{-1}(x)$ *şi* $f(x) = x$ *sunt echivalente.*

Deoarece această ultimă proprietate este mai puţin evidentă, schiţăm şi o scurtă demonstraţie:

- dacă $f(x_0) = x_0$, atunci $f^{-1}(x_0) = f^{-1}(f(x_0)) = x_0 = f(x_0)$;

- dacă $f(x_0) > x_0$ atunci $f^{-1}(x_0) < f^{-1}(f(x_0)) = x_0 < f(x_0)$, iar dacă $f(x_0) < x_0$ atunci $f^{-1}(x_0) > f^{-1}(f(x_0)) = x_0 > f(x_0)$, deci dacă $f(x_0) \neq x_0$, atunci $f^{-1}(x_0) \neq f(x_0)$.

Prin urmare, dacă f este inversabilă şi strict crescătoare, atunci pentru a rezolva ecuaţia $f(x) = f^{-1}(x)$ este suficient să rezolvăm ecuaţia $f(x) = x$.

Să mai remarcăm şi că, dacă renunţăm la condiţia de funcţie crescătoare, proprietatea nu mai rămâne adevărată: funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$ este egală cu propria inversă, deci ecuaţia $f(x) = f^{-1}(x)$ are ca soluţie orice număr real, dar ecuaţia $f(x) = x$ are doar soluţia $x = 0$.

3. Folosirea convexităţii/concavităţii

P_4. *Fie funcţiile* $f, g : I \to R$. *Dacă* f *este convexă şi* g *concavă pe* I, *cel puţin una dintre relaţii fiind strictă, sau invers, ecuaţia* $f(x) = g(x)$ *are cel mult două soluţii pe* I.

Într-adevăr, dacă, de exemplu, f este strict convexă şi g este concavă iar $f(a) = g(a)$ şi $f(b) = g(b)$, $a < b$, atunci:

- pentru $x_1 \in (a, b)$ există $t_1 \in (0, 1)$ astfel încât $x_1 = (1 - t_1)a + t_1 b$, deci $f(x_1) < (1 - t_1)f(a) + t_1 f(b) = (1 - t_1)g(a) + t_1 g(b) \leq g(x_1)$, de unde $f(x_1) < g(x_1)$;

- pentru $x_2 > b$ există $t_2 \in (0,1)$ astfel încât $b = (1-t_2)a + t_2 x_2$, deci $(1-t_2)f(a) + t_2 f(x_2) > f(b) = g(b) \geq (1-t_2)g(a) + t_2 g(x_2)$, de unde $f(x_2) > g(x_2)$;

- cazul $x_3 < a$ se tratează analog cu cel precedent, rezultând $f(x_3) > g(x_3)$.

Să mai remarcăm şi că, dacă funcţiile au acelaşi tip de convexitate, pot exista mai mult de două soluţii. De exemplu, ecuaţia

$$\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}} x$$

are soluţile $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{4}$, dar şi soluţia x_3 a ecuaţiei $\log_{\frac{1}{16}} x = x$.

4. Folosirea inegalităţilor

Pentru unele ecuaţii se pot folosi cazurile de egalitate ale unor inegalităţi remarcabile.

Aplicaţii

1. (Gazeta Matematică) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt[3]{2014 + f\left(2^x\right)} + \sqrt[3]{2015 + f\left(x^2\right)} = \sqrt[3]{2016 - f\left(2^x\right)} + \sqrt[3]{2017 - f\left(x^2\right)}.$$

Arătaţi că funcţia f nu este injectivă.

Soluţie. Observăm, inspectând graficele funcţiilor date prin $f_1\left(x\right) = x^2$ şi $f_2\left(x\right) = 2^x, \forall x \in \mathbb{R}$, că ecuaţia $x^2 = 2^x$ are două soluţii: $x_1 = 2$, $x_2 \in (-1,0)$. Apoi, dacă $f_1\left(x\right) = f_2\left(x\right) = \alpha$, atunci

$$\sqrt[3]{2014 + \alpha} + \sqrt[3]{2015 + \alpha} = \sqrt[3]{2016 - \alpha} + \sqrt[3]{2017 - \alpha}.$$

Membrul stâng este funcţie strict crescătoare în α, iar membrul drept este funcţie strict descrescătoare şi $\alpha = 1$ este soluţie. Prin urmare $\alpha = 1$ este singura soluţie a ecuaţiei. Rezultă $f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right) = 1$, deci f nu este injectivă.

2. (Supliment Gazeta Matematică) Aflaţi numerele reale nenule x pentru care

$$2016^{x^3-1} + 2016^{\frac{4}{x^3}-1} = 4032.$$

Soluţie. Trebuie $x > 0$. În acest caz, din inegalitatea mediilor obţinem

$$2016^{x^3-1} + 2016^{\frac{4}{x^3}-1} \geqslant 2\sqrt{2016^{x^3+\frac{4}{x^3}-2}} \geqslant 2\sqrt{2016^{2\sqrt{4}-2}} = 4032.$$

Egalitatea se obţine atunci când $x^3 - 1 = \dfrac{4}{x^3} - 1$, adică $x = \sqrt[3]{2}$.

3. (Gazeta Matematică) Fie $a, b \in (1, \infty)$. Să se rezolve ecuaţia

$$\left(a^x + b^{\frac{1}{x}} + \left(\sqrt{a+b}\right)^{x+\frac{1}{x}}\right) \cdot \left(b^x + a^{\frac{1}{x}} + \left(\sqrt{a+b}\right)^{x+\frac{1}{x}}\right) = 4\left(a+b\right)^2.$$

Soluţie. Trebuie $x > 0$, deoarece în caz contrar membrul stâng este mai mic decât $(1+1+1)(1+1+1) = 9$, pe când cel drept este cel puţin 16. În acest caz, din $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ obţinem succesiv

$$\begin{aligned}
&\left(a^x + b^{\frac{1}{x}} + \left(\sqrt{a+b}\right)^{x+\frac{1}{x}}\right) \cdot \left(b^x + a^{\frac{1}{x}} + \left(\sqrt{a+b}\right)^{x+\frac{1}{x}}\right)\\
&\geqslant \left(a^x + b^{\frac{1}{x}} + (a+b)\right) \cdot \left(b^x + a^{\frac{1}{x}} + (a+b)\right)\\
&= (ab)^x + (ab)^{\frac{1}{x}} + a^{x+\frac{1}{x}} + b^{x+\frac{1}{x}} + (a+b)(a^x + a^{\frac{1}{x}} + b^x + b^{\frac{1}{x}}) + (a+b)^2\\
&\geqslant 2(\sqrt{ab})^{x+\frac{1}{x}} + a^2 + b^2 + (a+b)(2a+2b) + (a+b)^2 \geqslant 4\,(a+b)^2\,.
\end{aligned}$$

Egalitatea are loc pentru $x = \frac{1}{x} > 0$, adică $x = 1$

4. (Gazeta Matematică) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia:

$$x \cdot 3^{x^2-3} - 3^{x+1} + x^2 \cdot 3^x = x^2 + x - 3.$$

Soluţie. Pentru $x \neq \pm\sqrt{3}$ şi $x \neq 0$, ecuaţia se scrie

$$\frac{3^{x^2-3} - 1}{x^2 - 3} + \frac{3^x - 1}{x} = 0. \tag{1}$$

Dar $\dfrac{3^t - 1}{t} > 0, \forall t \neq 0$, deci (1) nu are soluţie. Astfel, $-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0$ sunt singurele soluţii ale ecuaţiei.

5. (Gazeta Matematică) Rezolvaţi ecuaţia $1 + x^{\log_3 2} = x, x \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Observăm că trebuie $x > 1$. Apoi $a = \log_3 2 \in (0,1)$, iar ecuaţia se scrie $x^a(x^(1-a) - 1) = 1$. Deoarece $a > 0$, $1 - a > 0$ şi $x > 1$, funcţiile $x \mapsto x^a$ şi $x \mapsto x^{1-a} - 1$ sunt strict crescătoare şi pozitive, deci produsul lor este o funcţie strict crescătoare. Astfel, $x = 3$ este unica soluţie a ecuaţiei.

6. (Gazeta Matematică) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$16^x + 48^x + 45^x + 50^x = 32^x + 36^x + 75^x + 20^x.$$

Soluţie. Fie $a = 2^x, b = 3^x, c = 5^x$. Atunci ecuaţia este $a^4 + a^4 b + b^2 c + ac^2 = a^5 + a^2 b^2 + bc^2 + a^2 c$, sau

$$\left(a^2 - c\right)(b - a)\left(b + a - a^2 - c\right) = 0.$$

$a^2 - c = 0 \Rightarrow 4^x = 5^x \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$b - a = 0 \Rightarrow 3^x = 2^x \Rightarrow x = 0$

$b + a - a^2 - c = 0 \Rightarrow 2^x + 3^x = 4^x + 5^x| : 4^x$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x = 1 + \left(\frac{5}{4}\right)^x \Rightarrow x = 0$$

Deci, $x = 0$ este unica soluţie a ecuaţiei.

7. (Olimpiada Liceelor Maghiare din Europa) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$64^{\log_3 x} = x^2 \cdot 8^{\log_3 x} - 8^{\log_3 x}.$$

Soluţie. Din condiţia de existenţă a logaritmilor obţinem $x > 0$. Prin împărţirea ecuaţiei cu $8^{\log_3 x}$ se obţine ecuaţia $8^{\log_3 x} = x^2 - 1$. Fie $\log_3 x = a$, de unde $3^{2a} - 1 = 8^a$, sau $9^a = 8^a + 1$. Prin împărţire cu 8^a obţinem $\left(\frac{9}{8}\right)^a = 1 + \left(\frac{1}{8}\right)^a$ cu singura soluţie $a = 1$, prin urmare $x = 3$ este unica soluţie a ecuaţiei.

8. Determinaţi perechile (x, y) de numere întregi pentru care
$2^x + \log_3 x = y^2$ şi $2^y + \log_3 y = x^2$

Olimpiada Naţională de Matematică, etapa judeţeană 2017

Soluţie. Se obţine egalitatea $2^x + \log_3 x + x^2 = 2^y + \log_3 y + y^2$ şi, cum funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + \log_3 x + x^2$ este strict crescătoare, deci injectivă, deducem că $x = y$. Pentru a rezolva ecuaţia $2^x + \log_3 x = x^2$ observăm că 1, 2 şi 4 nu sunt soluţii, iar 3 este soluţie. Dar, pentru $x \geqslant 5$, $x \in \mathbb{N}$ avem $2^x > x^2$, prin urmare $x = 3$ este singura soluţie a ecuaţiei. Obţinem $(3, 3)$ soluţia sistemului.

9. (Gazeta Matematică) Determinaţi numerele reale x, y, z, t pentru care

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = x^4 + y^4 + z^4 + t^4.$$

Soluţie. Din inegalitatea Cauchy-Schwarz obţinem

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + t^2\right)\left(x^4 + y^4 + z^4 + t^4\right) \geqslant \left(x^3 + y^3 + z^3 + t^3\right)^2.$$

Relaţiile date arată directa proporţionalitate a cvadrupletelor (x, y, z, t) şi (x^2, y^2, z^2, t^2), prin urmare $x^2 = ax$, $y^2 = ay$, $z^2 = az$, $t^2 = at$. Rezultă $x^3 = ax^2$ şi analoagele, de unde $x = y = z = t = 0$ sau $a = 1$. În primul caz obţinem soluţia $(0, 0, 0, 0)$, iar în al doilea caz obţinem soluţii în care care câteva necunoscute sunt 0, iar celelalte 1 – în total, 16 soluţii.

10. (Olimpiada Liceelor Maghiare din Europa) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale pozitive ecuaţia

$$2^{4x+1} + 2^{\frac{1}{2x^2}} = 12$$

Soluţie. Scriem pe 2^{4x+1} sub forma $2^{4x} + 2^{4x}$ şi din inegalitatea mediilor obţinem $3\sqrt[3]{2^{8x+\frac{1}{2x^2}}} \leqslant 12$. Dar $8x + \frac{1}{2x^2} \geqslant 6 \Leftrightarrow (2x-1)^2(4x+1) \geqslant 0$ pentru $x > 0$, cu egalitate pentru $x = \frac{1}{2}$. Prin urmare soluţia ecuaţiei este $x = \frac{1}{2}$.

11. (Gazeta Matematică) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = \sqrt[10]{x + 1023}.$$

Soluţie. Din existenţa radicalului obţinem $x \geqslant 0$. Cum 0 nu este soluţie, împărţind ecuaţia cu $\sqrt[10]{x}$ obţinem $\sqrt[5]{x^2} + \sqrt[30]{x^7} = \sqrt[10]{1 + \frac{1023}{x}}$. Cum funcţia $0 \leqslant x \mapsto f(x) = \sqrt[5]{x^2} + \sqrt[30]{x^7}$ este strict crescătoare şi funcţia $0 \leqslant x \mapsto$

$g(x)=\sqrt[10]{1+\frac{1023}{x}}$ este strict descrescătoare obţinem că ecuaţia are cel mult o soluţie, dar $x=1$ verifică ecuaţia. Prin urmare, $x=1$ este singura soluţie a ecuaţiei.

12. (Gazeta Matematică) Să se determine numerele $x,y\in(1,\infty)$ pentru care

$$\log_{2y}x+\lg y+\log_{5x}2+\log_{xy}5=2.$$

Soluţie. Ecuaţia se scrie

$$\frac{\log_2 x}{1+\log_2 y}+\frac{\log_2 y}{1+\log_2 5}+\frac{1}{\log_2 5+\log_2 x}+\frac{\log_2 5}{\log_2 x+\log_2 y}=2,$$

sau, cu notaţiile $a=\log_2 x, b=\log_2 y, c=\log_2 5$,

$$\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{c}{a+b}=2.$$

Din inegalitatea lui Cauchy-Schwarz avem

$$2=\frac{a^2}{a+ab}+\frac{b^2}{b+bc}+\frac{1}{c+a}+\frac{c^2}{ac+bc}\geqslant\frac{(a+b+c+1)^2}{2bc+ab+ac+2a+b+c}$$

$\Leftrightarrow 4bc+2ab+2ca+2(2a+b+c)\geqslant a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca+a+b+c)+1$

$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-c)^2\leqslant 0$, prin urmare $a=1$ şi $b=c$, deci $x=2$ şi $y=5$ – soluţia ecuaţiei.

13. (Gazeta Matematică) Să se rezolve în mulţimea $\mathbb{R}$ ecuaţia $9x^2-27x+19=\frac{1}{2}\sin\pi x$.

Soluţie. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=9x^2-27x+19-\frac{1}{2}\sin\pi x$ este convexă[1)] ($f''(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$), deci ecuaţia are cel mult două soluţii. Cum $f\left(\frac{7}{6}\right)=f\left(\frac{11}{6}\right)=0$, acestea sunt soluţiile căutate.

14. (Gazeta Matematică) Rezolvaţi ecuaţia $4^x=\log_2 x+\sqrt{x-1}+14$.

Soluţie. Considerăm funcţia $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=4^x-\log_2 x-\sqrt{x-1}-14$ care este strict convexă, fiind o sumă de funcţii strict convexe şi o constantă ($\log_2$ şi $\sqrt{\ }$ sunt strict concave, deci opusele lor sunt strict convexe). Arătăm că ecuaţia $f(x)=0$ are cel mult o rădăcină.

Avem $f(1)=-10<0$. Presupunem, prin absurd, că există $x_1,x_2\in[1,\infty)$ cu $1<x_1<x_2$ şi $f(x_1)=f(x_2)=0$. Atunci există $t\in(0,1)$ astfel încât $x_1=(1-t)\cdot 1+t\cdot x_2$, deci $f(x_1)<(1-t)\cdot f(1)+t\cdot f(x_2)=-10(1-t)<0$, contradicţie cu $f(x_1)=0$. Cum $f(2)=0$, ecuaţia are soluţia unică $x=2$.

15. Rezolvaţi ecuaţia $2\sqrt[3]{2x-1}=x^3+1$.

[1)] un argument „mai elementar” eşuează, deoarece atât membrul stâng, cât şi membrul drept corespund unor funcţii convexe pe intervalul $(1,2)$

Soluţie. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$ avem

$$y = \sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow 2x - 1 = y^3 \Leftrightarrow x = \frac{y^3+1}{2},$$

deci ecuaţia $f(x) = y$ (cu necunoscuta x) are, pentru orice $y \in \mathbb{R}$, soluţie unică. Aceasta arată că funcţia este inversabilă şi inversa ei este dată de $y \mapsto \dfrac{y^3+1}{2}$, $y \in \mathbb{R}$. Cum f este strict crescătoare şi ecuaţia iniţială se scrie $f(x) = f^{-1}(x)$, ea este echivalentă cu $f(x) = x$, adică $x^3 - 2x + 1 = 0$, sau $(x-1)(x^2+x-1) = 0$, cu soluţiile $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

16. Arătaţi că ecuaţia $\log_3(1 + \sqrt[3]{x}) = (3^x - 1)^3$ are două soluţii pe mulţimea $[0, \infty)$.

Soluţie. Fie funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3(1 + \sqrt[3]{x})$. Pentru $y \in \mathbb{R}$ şi $x \in (-1, \infty)$, ecuaţia $f(x) = y$ are soluţia unică $x = (3^y - 1)^3$. Prin urmare, funcţia f este inversabilă şi $f^{-1}(y) = (3^y - 1)^3$, $y \in \mathbb{R}$. Dar funcţia f este strict crescătoare, deci ecuaţia dată, care se scrie $f(x) = f^{-1}(x)$, este echivalentă cu ecuaţia $f(x) = x$, adică $\log_3(1 + \sqrt[3]{x}) = x$, sau

$$1 + \sqrt[3]{x} = 3^x. \tag{2}$$

Considerăm funcţiile $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$, $h(x) = 3^x$. Funcţia g este concavă iar funcţia h este convexă, prin urmare ecuaţia (1) are cel mult două soluţii. O soluţie a ecuaţiei (2) este $x = 0$. Arătăm că $g\left(\frac{1}{3}\right) > h\left(\frac{1}{3}\right)$, care este echivalentă cu $1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} > \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow 3 < \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}$ care este adevărată. Cum g este concavă şi f convexă, reiese că ecuaţia (2) mai are o soluţie pe intervalul $\left(0, \frac{1}{3}\right)$. Prin urmare ecuaţia (2) are două soluţii: $x_1 = 0$ şi $x_2 \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, care sunt şi soluţii ale ecuaţiei iniţiale.