ABORDĂRI LOGICO-OPERAȚIONALE ÎN REZOLVAREA PROBLEMELOR ARITMETICE LA MATEMATICĂ

1.1 Disciplina matematică în problemele aritmetice la gimnaziu

Conceptul de problemă cuprinde o varietate de preocupări și acțiuni din domenii diferite. Prin problemă se înțelege o situație a cărei rezolvare se poate obține printr-un gândire și calcul. ”Problema de matematică constituie transpunerea unor situații practice sau a unui complex de situații practice în relații cantitative în care, pe baza valorilor numerice date și aflate într-o anumită dependență unele față de altele și și față de una sau mai multe valori numerice necunoscute, se cere determinarea acestor valori necunoscute.”[1]

Rezolvarea problemelor de matematică este una din cele mai sigure căi care duce la dezvoltarea gândirii, imaginației, atenției și spiritului de observație al elevilor și reprezintă o activitate de profunzime, cu un caracter de analiză și sinteză superioare. Rezolvând probleme de matematică, elevii își vor pune la încercare în cel mai înalt grad capacitățile intelectuale, solicitându-și toate disponibilitățile psihice, în special inteligența, totul pe fondul stăpânirii unui repertoriu de cunoștințe matematice solide precum și deprinderi de aplicare a acestora, motiv pentru care, programa de matematică din ciclul gimnazial acordă rezolvării problemelor o importanță deosebită. Pentru a reuși elevul să rezolve probleme, nu este vorba de a parcurge cât mai multe tipuri de probleme sau metode de rezolvare, însă trebuie să se creeze elevului situații noi de învățare, unde acesta trebuie să răspundă cât mai adecvat, iar acest lucru se va întâmpla în urma unui demers de explorare și investigație, din această cauză rezolvarea de probleme matematice trebuie să decurgă ca o necesitate firească de situații concrete din viața de zi cu zi.

În momentul când elevii rezolvă probleme de matematică, aceștia își formează priceperi și deprinderi de a analiza situația dată de problemă, de a intui și să găsească calea prin care se obține cerința problemei. Rezolvarea problemelor ajută astfel la cultivarea și dezvoltarea capacităților creatoare ale gândirii, la formarea perspicacității și inițiativei, la creșterea încrederii de sine.

Dobândirea de către elevi a abilității rezolvării unei probleme de matematică nouă, necunoscută, este obligatoriu ca aceștia să dispună de o serie de competențe în domeniu:

[1] I. Neacșu- *Metodica predării la clasele I-IV,* E.D.P., București, 1988, pag 196

informativ, instrumental și formativ. O condiție foarte importantă pentru ca activitatea mintală să fie cu adevărat productivă constă în existența unor informații bogate și foarte clar organizate.

Recunoașterea și încadrarea unei probleme de matematică într-o categorie este un act creativ. ”A ști” rezolvarea unei probleme constă în a avea capacitățile necesare pentru rezolvarea oricărei probleme la prima vedere. Aceste capacități se referă la înțelegerea datelor și ordinii lor, înțelegerea condițiilor problemei, dar și a relațiilor cunoscute în datele problemei.

În rezolvarea unei probleme nu sunt utilizate doar procesele de cunoaștere, ci întreaga personalitate a rezolvitorului, în toate coordonatele ei raționale, afective, volitive. Efortul pe care îl face elevul în momentul când rezolvă conștient o problemă de matematică, presupune din partea acestuia o mare mobilizare a proceselor psihice de cunoaștere, motivațional-afective. De asemenea, gândirea este cel mai solicitat și antrenat proces cognitiv, iar acest lucru este realizat prin operațiile logice de analiză, sinteză, comparație, abstractizare și generalizare.

Prin rezolvarea unor probleme de matematică asemănătoare se ajunge la realizarea unui algoritm de rezolvare a acelui tip de probleme care, cu cât este mai flexibil, cu atât dă posibilitatea mişcării mai rapide a gândirii. Acest lucru se realizează prin diversitatea problemelor care aparţin aceleiaşi categorii de probleme. În rezolvarea problemelor este foarte important ca înțelegerea structurii problemei, dar și a logicii ei de rezolvare, din acest motiv elevul trebuie să aibă în sfera gândirii sale întregul filtru al desfășurării raționamentului și de asemenea trebuie să-l rețină ca fiind un element important.

Modul în care se face introducerea elevilor în activitatea de rezolvare a problemelor trebuie realizat, antrenându-i în depunerea unor eforturi mărite pe măsură ce înaintează în studiu și pe măsură ce experiența lor este dezvoltată. Astfel, treptat, elevii ajung să dobândească deprinderi să rezolve probleme de matematică. Diversitatea și complexitatea problemelor acre sunt rezolvate de elevi crește efortul mintal și eficiența formativă a rezolvării problemelor.

Rezolvarea unor probleme cu un nivel mai ridicat de dificultate trebuie să țină cont și de posibilitățile intelectuale ale elevilor, de experienţa acestora, de competenţele necesare acestei activități, din acest motiv este de dorit ca periodic să se investigheze elevii pentru a vedea nivelul lor de cunoștințe, gradul de competență în vederea rezolvării și compunerii problemelor de matematică pentru a putea sesiza din timp eventualele rămâneri în urmă și de a asigura progresul fiecărui elev.

Profesorii trebuie să insiste asupra rezolvării prin mai multe căi, cu verificarea soluției găsite, dar și pe creșterea dificultății acesteia prin introducerea de noi date problemei respective sau prin schimbarea întrebării acesteia. Talentul profesorului de a utiliza echilibrat timpul prevăzut pentru munca independentă a elevilor joacă un rol important în asigurarea succesului la învățătură a elevilor.

1.1.1 Probleme cu operații relativ evidente

Primele probleme simple sunt problemele pe care un elev le face zilnic la școală, în familie sau în timpul jocurilor. Pentru a-i face pe elevi sa înțeleagă utilitatea rezolvării problemelor este necesar ca aceștia să înțeleagă faptul că în viața de zi cu zi există situații când trebuie să găsească răspunsuri la diferite întrebări.

Problemele simple sunt :

a) probleme simple bazate pe adunare, adică de aflare a sumei a doi termeni, de aflare a unui număr mai mare cu un număr de unități decât un număr dat, adică probleme de genul ”cu atât mai mult”
b) probleme simple bazate pe scădere, adică de aflare a diferenței, de aflare a unui număr care să aibă cu un număr de unități mai puțin decât un număr dat, adică probleme de genul ”cu atât mai puțin”
c) probleme simple bazate pe înmulțire, adică de repetare de un număr de ori a unui număr dat, de aflare a produsului, de aflare a unui număr care să fie de un număr de ori mai mare decât un număr dat
d) probleme simple bazate pe împărțire, adică de împărțire a unui număr dat în părți egale, de împărțire prin cuprindere a unui număr în alt număr, de aflare a unui număr care să fie de un număr de ori mai mic decât un număr dat, de aflare a unei părți dintr-un întreg, de aflare a raportului dintre două numere date.

Exemple:

1. Ana are într-un vas 30 l apă. Maria a mai pus 50 l apă. Câți litri de apă sunt în vas?
   Rezolvare: 30+50=80 l
2. În curtea bunicii sunt 2 nuci. Primul nuc are 130 de nuci, iar celălalt nuc cu 180 de nuci mai mult. Câte nuci va culege în total bunica?
   Rezolvare: 130+180=310 nuci
3. Nicu a economisit 53,5 lei. Acesta merge în magazin și își cumpăra bomboane de 10,5 lei. Ce sumă de bani mai are Nicu?
   Rezolvare: 53,5-10,5=43 lei

4. O minge de fotbal costa 100,5 lei, iar una de volei cu 50,3 lei mai puțin. Cât costă mingea de volei?

   Rezolvare: 100,5-50,3=50,2 lei
5. Mama a cumpărat 7 kg de piersici cu 3,5 lei. Cât a plătit mama?

   Rezolvare: $7 \cdot 3{,}5 = 24{,}5$ lei
6. Raul are 23,6 lei, iar Paul are de 5 ori mai mulți lei decât Raul. Câți lei are Paul?

   Rezolvare: $23{,}6 \cdot 5 = 118$ lei
7. La o cofetărie s-au așezat 438 kg de portocale în număr egal în 6 lăzi. Câte kg de portocale sunt în fiecare ladă?

   Rezolvare: 438:6= 73 kg
8. Ana are 48,5 lei, iar Victor are de 5 ori mai puțin. Câți lei are Victor?

   Rezolvare: 48,5:5=9,7 lei

1.1.2 Probleme de numerație

Pentru acest tip de probleme nu există o metodă standard de rezolvare. Acestea se rezolvă în general ținând cont de:

- Proprietățile numerelor în sistemul zecimal de numerație;
- Proprietățile operațiilor cu numere;
- Observarea unor particularități a datelor și rezultatelor.

Exemple:

1. Dacă $1256 > \overline{abcd} > 1234$ arătați că 17> $a + b + c + d > 6$

Rezolvare: $1256 > \overline{abcd} > 1234 \Rightarrow a = 1$

$$2 \leq b \leq 2 \;\Longrightarrow b = 2$$

$$3 \leq c \leq 5 \;\Longrightarrow \begin{cases} c = 3 \Longrightarrow \overline{123d} > 1234 \Longrightarrow d > 4 \Longrightarrow d \in \{5,6,7,8,9\} \\ c = 4 \Longrightarrow \overline{124d} > 1234 \Longrightarrow d \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \\ c = 5 \Longrightarrow 1265 > \overline{125d} \Longrightarrow d < 6 \Longrightarrow d \in \{0,1,2,3,4,5\} \end{cases}$$

Se știe că $a + b + c + d > 6$

1+2+c+d> 6

Luăm valorile găsite a lui c și verificăm inegalitatea:

Pentru c=3

1+2+3+d$>$ 6

6+d$>$ 6 care este o propoziție adevărată, mai ales că avem $d > 4$

Mai avem de arătat 17$> a + b + c + d$

1+2+c+d$<$ 17

1+2+3+d$<$ 17, luăm pentru d valoarea maximă, adică d=9

1+2+3+9$<$ 17

15$<$ 17, care este o propoziție adevărată de unde rezultă că 17$> a + b + c + d > 6$

Analog se demonstrează și celelalte cazuri.

2. Scrieți în baza 4 numărul 375.

Rezolvare:

Dacă vrem să scriem numărul 375 care este scris în baza 10 în baza 4, înseamnă că trebuie să îl scriem după puterile lui 4. Puterile lui 4 sunt: 1, 4, 16, 64, 256, ...

Pe 375 trebuie să îl scriem ca sumă de puteri a lui 4. În scrierea lui 375 vor putea apărea primele 4 cifre, adică cifrele 0,1,2,3..

Deci dezvoltarea lui 375 este:

375=256+119

=256+64+55

=256+64+16+16+16+7

=256+64+16+16+16+4+1+1+1

$=256 + 64 + 3 \cdot 16 + 4 + 3 \cdot 1$

$=1 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0$

$=11313_{(4)}$

3. Scrieți în baza 10 numerele $1011_{(2)}$ și $102_{(3)}$.

Rezolvare:

$1011_{(2)} = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3$=1+2+8=11

$102_{(3)} = 2 \cdot 3^0 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2 = 2 + 9 = 11$

4. Aflați numerele naturale $\overline{a135b}$ scrise în baza 10, divizibile cu 2 și 9.

Rezolvare:

$\overline{a135b} \vdots 2 \implies b \in \{0,2,4,6,8\}$

$b = 0 \implies \overline{a1350} \vdots 9 \implies a + 1 + 3 + 5 + 0 \in M_9$

$a + 9 = 9$

a=0 nu convine deoarece a este prima cifră a numărului, deci aceasta nu poate fi egală cu 0

a+9=18

a=9 (avem prima soluție adică numărul 91350)

$b = 2 \implies \overline{a1352} \vdots 9 \implies a + 1 + 3 + 5 + 2 \in M_9$

$a + 11 = 9$

a=-2 nu convine, deoarece este un număr negativ, -2 nu este o cifră

a+11=18

a=7 (avem a doua soluție adică numărul 71352)

$b = 4 \implies \overline{a1354} \vdots 9 \implies a + 1 + 3 + 5 + 4 \in M_9$

a+13=9

a=-4 nu convine, deoarece este un număr negativ, -4 nu este o cifră

a+13=18

a=5 (avem a doua soluție adică numărul 51354)

a+13=27

a=14 nu convine, deoarece 14 nu este o cifră

$b = 6 \implies \overline{a1356} \vdots 9 \implies a + 1 + 3 + 5 + 6 \in M_9$

a+15=18

a=3 (avem următoarea soluție adică numărul 31356)

$b = 8 \implies \overline{a1358} \vdots 9 \implies a + 1 + 3 + 5 + 8 \in M_9$

$a + 17 = 18$

a=1 (avem următoarea soluție adică numărul 11358)

5. Dacă $\overline{abc}+\overline{bc}+c=\overline{cba}+\overline{ba}+a$, arătați că a=c.

Rezolvare:

$\overline{abc}+\overline{bc}+c=\overline{cba}+\overline{ba}+a$

100a+10b+c+10b+c+c=100c+10b+a+10b+a+a

100a+20b+3c=100c+20b+3a

100a+3c=100c+3a

97a=97c$\Rightarrow a=c$

6. Determinați numerele naturale de forma $\overline{x71y}$, scrise în baza 10, care se divid cu 15.

Rezolvare:

$\overline{x71y} \vdots 15 \Leftrightarrow \overline{x71y} \vdots 3 \text{ și } \overline{x71y} \vdots 5$

$\overline{x71y} \vdots 5 \Rightarrow y \in \{0;5\}$

$$y=0 \Rightarrow \overline{x710} \vdots 3 \Rightarrow x+8 \in M_3 \Rightarrow \begin{cases} x+8=9 \Rightarrow x=1\ (convine) \\ x+8=12 \Rightarrow x=4\ (convine) \\ x+8=15 \Rightarrow x=7\ (convine) \\ x+8=18 \Rightarrow x=10\ (nu\ convine) \end{cases}$$

$$y=5 \Rightarrow \overline{x75} \vdots 3 \Rightarrow x+13 \in M_3 \Rightarrow \begin{cases} x+13=15 \Rightarrow x=2\ (convine) \\ x+13=18 \Rightarrow x=5\ (convine) \\ x+13=21 \Rightarrow x=8\ (convine) \\ x+13=24 \Rightarrow x=11\ (nu\ convine) \end{cases}$$

Avem ca soluții următoarele numere: 1710, 2715, 4710, 5715, 7710, 8715.

7. Determinați numărul $\overline{abc}$, scris în baza 10, astfel încât $\overline{abc}$=6 · $\overline{ac}$

Rezolvare:

$\overline{abc}$=6 · $\overline{ac}$

100a+10b+c=6· $(10a+c)$

100a+10b+c=60a+6c

40a+10b=5c

8a+2b=c , dar a,b,c sunt cifre, cu a$\neq$ 0

a=1$\Rightarrow 8+2b=c$

b=0$\Longrightarrow 8+0=c \Longrightarrow c=8 \Longrightarrow \overline{abc}=108$

a=2$\Longrightarrow 16+2b=c$

b=0$\Longrightarrow 16+0=c$ nu convine deoarece c este o cifră

Analog se verifică pentru celelalte valori ale lui a și se observă că valorile date nu convin, de unde rezultă avem soluția $\overline{abc}=108$

8. Arătați că $\overline{abc}+\overline{cab}+\overline{bca} \vdots 37$

Rezolvare:

$\overline{abc}+\overline{cab}+\overline{bca}=100a+10b+c+100c+10a+b+100b+10c+a$

=111a+111b+11c+

=111(a+b+c)

$=3\cdot 37(a+b+c) \ \vdots 37$

1.1.3 Probleme care pot fi rezolvate prin metoda figurativă(grafică)

Metoda grafică constă în reprezentarea prin desen a mărimilor necunoscute și fixarea în desen a relațiilor dintre ele și a mărimilor date în problemă. Această metodă ajută la formarea schemei problemei, la concentrarea asupra tuturor condițiilor date în problemă, dar și la concentrarea asupra lor.

O problemă care se rezolvă cu ajutorul acestei metode se sprijină pe raționament și utilizează înțelesul concret al operațiilor. Figura corespunzătoare problemei trebuie să fie o schematizare a enunțului pentru a păstra în atenție relațiile matematice și nu toate aspectele concrete ca într-o fotografie.

Exemple:

1. Doi frați au economisit împreună 200 de lei. Câți lei a economisit fiecare, dacă unul a economisit cu 16 lei mai mult?

Rezolvare:

Vom reprezenta cele două mărimi care intervin în problemă, adică suma economisită de fiecare frate, prin două segmente de dreaptă, ținând cont de faptul că unul dintre ei a economisit cu 16 lei mai mult.

$$\left.\begin{array}{l}\text{I}\ \ |\text{-----}| \\ \text{II}\ \ |\text{-----}|+\ 16\end{array}\right\}200$$

Diferența de mărime dintre cele două segmente reprezintă exact diferența dintre sumele celor doi copii. Se observă că segmentul de dreaptă reprezintă sumele celor doi frați la un loc este format din două segmente egale și încă cei 16 lei în plus față de suma economisită de primul frate.

Pentru a determina numărul care reprezintă unul din segmentele egale procedăm astfel:

(200-16):2=92, ceea ce reprezintă suma economisită de primul frate. Valoarea economisită de cel de-al doilea frate este 92+16=108 lei.

Verificare: 92+108=200.

2. Într-o pădure sunt 2478 de stejari și fagi. Numărul fagilor este de 5 ori mai mare decât al stejarilor. Câți fagi și câți stejari sunt în pădure?

$$\left.\begin{array}{l}\text{S}\ \ |\text{-----}| \\ \text{F}\ \ |\text{-----}|\text{-----}|\text{-----}|\text{-----}|\text{-----}|\end{array}\right\}2478$$

Am reprezentat numărul stejarilor printr-un segment și numărul fagilor trebuie reprezentat printr-un segment de 5 ori mai mare. Deci în total, numărul stejarilor și fagilor este reprezentat prin două segmente, care însumează 6 părți egale. Pentru aflarea unei părți egale, adică numărul stejarilor procedăm astfel:

2478:6=413 (stejari)

Apoi se află numărul fagilor:

2478-413=2065

Verificare: 413+2065=2478

Probleme cu rezolvare asemănătoare:

3. În două lăzi sunt 76 kg de mere. Dacă din prima ladă se mută în a doua ladă 6 kg de mere, în ambele lăzi vor fi cantități egale. Câte kilograme de mere au fost la început în fiecare ladă.
4. Se știe că suma a două numere este 48,5. dacă primul număr este cu 36,2 mai mare decât al doilea, să se afle cele două numere.
5. La o campanie de împădurire elevii unei clase au plantat 132 de copaci. Știind că numărul de mesteceni a fost cu 54 mai mare decât numărul stejarilor, aflați numărul de copaci din fiecare specie care au fost plantați de elevii clasei la împădurire.
6. Într-o florărie s-au vândut 81 de flori: trandafiri, crini și garoafe. Știind că numărul de trandafiri vânduți este o treime din crini, iar garoafele vândute sunt de 5 ori mai multe decât trandafirii vânduți. Să se afle numărul de flori vândute de fiecare fel.
7. Bunica a plantat în curte 38 de flori: narcise, zambile și trandafiri. Zambile sunt cu 5 mai multe decât narcise, iar trandafirii sunt cu 3 mai multe decât lalele. Câte flori de fiecare fel a plantat bunica?
8. Se știe că suma a trei numere este 42. Dacă din fiecare număr se scade același număr se obține 3, 5, 7. Să se afle cele trei numere.
9. Suma a trei numere este 21. Dacă al doilea este jumătate din primul număr, iar al treilea este un sfert din primul număr. Determinați cele trei numere.
10. Suma a două numere este 65. Se știe că primul număr este de 4 ori mai mare decât al doilea număr, determinați cele două numere.

1.1.4 Probleme care pot fi rezolvate folosind regula de trei simplă și trei compusă (Metoda reducerii la unitate)

Prin metoda reducerii la unitate se rezolvă probleme, în care datele depind unele de altele succesiv. Se recurge la așezarea datelor într-o schemă, care să ușureze procesul de gândire în examinarea și rezolvarea problemei date. Aceste probleme se rezolvă, de obicei, prin procedeul proporțiilor și prin procedeul reducerii la unitate (întâlnită la clasele a IV-a și a V-a).

Cu ajutorul regula de trei simplă, se rezolvă problemele în care se dau două mărimi direct sau invers proporționale A și B în care se cunosc două valori a_1 $și$ a_2 ale mărimii A și valoarea b_1 a mărimii B corespunzătoare valorii a_1 și trebuie să se găsească valoarea b_2

a mărimii B corespunzătoare valorii a_2. Regula de trei simplă, este astfel definită deoarece în fiecare problemă care se rezolvă prin această regulă, sunt date trei numere și se caută al patrulea, proporțional cu numerele date.

Problemele care se rezolvă prin metoda regula de trei compusă exprimă dependența direct sau invers proporțională a unei mărimi față de două sau mai multe mărimi. Ele au în general un caracter practic-aplicativ deoarece ilustrează prin elemente matematice o serie de situații reale, întâlnite în viața de zi de zi sau în diferite faze ale unui proces de producție. Rezolvarea acestui gen de probleme, presupune aplicarea succesivă a regulii de trei simplă, asociind mărimii care conține necunoscuta, pe rând, câte una din celelalte mărimi și se exprimă valoarea necunoscutei în funcție de acestea.

Exemple:

Regula de trei simplă:

1. Din 100 kg de grâu se obțin 90 kg făină. Ce cantitate de grâu este necesară pentru a obține 675 kg de făină?

Rezolvare:

Se observă că mărimile sunt direct proporționale, deoarece dacă crește numărul kilogramelor de făină va crește și numărul kilogramelor de grâu.

100 kg grâu................................ 90 kg făină

x kg grâu...................................675 kg făină

$$x = \frac{100 \cdot 675}{90} = 750$$

x=750 kg grâu

2. Dacă lăsăm deschis un robinet, un bazin se umple în 30 minute. În câte minute se va umple bazinul dacă vom deschide 5 robinete?

Rezolvare:

Se observă că mărimile sunt invers proporționale, deoarece dacă crește numărul robinetelor, va scădea timpul (minutele) în care bazinul se va umple.

1 robinet.................................... 30 minute

5 robinete...................................x minute

$$x = \frac{1 \cdot 30}{5} = 6$$

x=6 minute

3. **3.** Ileana a cumpărat 5 buchete de flori și a plătit 125 lei. Câte buchete de flori a cumpărat Mariana dacă în total a plătit 300 de lei?

Rezolvare:

Se observă că mărimile sunt direct proporționale, deoarece dacă crește prețul plătit pentru buchetele de flori va crește și numărul buchetelor de flori.

5 buchete de flori.................................125 lei

X buchete de flori................................300 lei

$$x = \frac{5 \cdot 300}{125} = 12$$

x=12 buchete de flori

4. Doina a cumpărat 300 g de bomboane cu 2,1 de lei. Cât va plăti dacă aceasta va cumpăra 400g de bomboane de același fel?

Rezolvare:

Se observă că mărimile sunt direct proporționale, deoarece dacă crește cantitatea de bomboane cumpărată va crește prețul plătit pentru acestea.

300 g bomboane.............................2,1 lei

400 g bomboane................................x lei

$$x = \frac{2,1 \cdot 400}{300} = 2,8$$

x=2,8 lei

5. 4 muncitori sapă un șanț de 24 minute, aflați în câte minute vor săpa 20 muncitori același șanț.

Rezolvare:

Se observă că mărimile sunt invers proporționale, deoarece dacă crește numărul muncitorilor, va scădea lungimea șanțului.

4 muncitori.. 24 minute

16 muncitori...x minute

$$x = \frac{4 \cdot 24}{16} = 6$$

x=6 minute

6. 90 muncitori termină o lucrare în 147 zile, determinați în câte zile ar putea fi terminată aceeași lucrare de 35 muncitori.

Rezolvare:

Se observă că mărimile sunt invers proporționale, deoarece dacă crește numărul muncitorilor, va scădea lungimea șanțului.

90 muncitori ....147 zile

35 muncitori...............................x zile

$$x = \frac{90 \cdot 147}{35} = 378$$

x=378 zile

7. Din 9 kg material se realizează o pânză de 27 m. Câte kg de material sunt necesare pentru a realiza 54 m de pânză?

Rezolvare:

Se observă că mărimile sunt direct proporționale, deoarece dacă crește cantitatea de bomboane cumpărată va crește prețul plătit pentru acestea.

9 kg material.......................................27 m pânză

X kg material.......................................54 m pânză

$$x = \frac{9 \cdot 54}{27} = 18$$

x=18 kg material

Regula de trei compusă

1. **Pentru umplerea unui bazin de 800 de litri este necesar ca 6 robinete să curgă timp de 40 de minute. Dacă vrem să umplem un bazin de 2100 de litri și sunt 10 robinete de același fel deschise, cât timp acestea trebuie să curgă?**

Rezolvare:

Pasul 1: Analizăm problema

d *i*

800 l .... 6 robinete .... 40 min

2100 l .... 10 robinete .... x min

Pasul II: Să considerăm că avem 6 robinete de același fel în ambele cazuri. Enunțul problemei va fi:

800 l ……….……… 6 robinete ………….. 40 min

2100 l …………..…… 6 robinete ……………. y min

Vom trece peste enunțul cu robinete, pentru a putea calcula minutele doar în funcție de litri cu regula de trei simplă, mărimile fiind direct proporționale:

800 l ……….……… 40 min

2100 l …………...…… y min

y = 2100·40/800 = 105 min

Vom putea scrie rândul complet al problemei ajutătoare, adică:

2100 l ……………..…… 6 robinete ………….. 105 min

Pasul III: Deoarece la pasul anterior am obținut o valoare ajutătoare, adică am găsit minutele pentru 6 robinete, mai trebuie să calculăm minutele pentru cele 10 robinete, adică cerința problemei inițiale.

2100 l ……………..…… 6 robinete ………….. 105 min
2100 l ……………… 10 robinete ………………. x min

Deoarece mărimile cu unitatea litru sunt egale, vom trece peste litri de data aceasta și astfel vom putea calcula minutele doar în funcție de robinete, iar acest lucru se va face tot cu regula de trei simplă, doar că de data aceasta mărimile sunt invers proporționale:

6 robinete ……….……… 105 min
10 robinete …………...……… x min

$$x = \frac{6 \cdot 105}{10} = 63$$

x= 63 min.

2. 12 muncitori lucrează câte 8 ore pe zi și termină o lucrare în 6 zile. În câte zile vor termina aceeași lucrare 16 muncitori care vor lucra câte 9 ore pe zi?

Rezolvare:

Pasul I:

12 muncitori.............8ore/zi.................6 zile

16 muncitori.............9ore/zi.................x zile

Pasul II: Presupunem că cei 16 muncitori lucrează și ei 8 ore pe zi

12 muncitori.............8ore/zi.................6 zile

16 muncitori.............8ore/zi.................x zile

Vom elimina mărimile comune, adică 8 ore/zi și vom obține:

12 muncitori...............................6 zile

16 muncitori...............................x zile

$$x = \frac{6 \cdot 12}{16} = 4{,}5\ zile$$

Pasul II: Dar cei 16 muncitori muncesc 9 ore/zi, enunțul problemei devine

16 muncitori.............8ore/zi.................4,5 zile

16 muncitori.............9ore/zi.................x zile

Vom elimina mărimile care sunt comune, adică 16 muncitor și problema devine:

8ore/zi.................4,5 zile

9ore/zi.................x zile

$$x = \frac{8 \cdot 4{,}5}{9} = 4\ zile$$

1.1.5 Probleme care pot fi rezolvate folosind regula aducerii la același termen de comparație (Metoda comparației)

Problemele care se rezolvă folosind această metodă se caracterizează prin faptul că se dau două mărimi, care sunt comparate în același mod și legătura care exisă între ele. De aceea această metodă poartă numele de aducerea la același termen de comparației sau metoda comparației. Această metodă este asemănătoare cu metoda reducerii la unitate, care se întâlnește la rezolvarea unui sistem de două ecuații cu două necunoscute.

Mărimile care trebuie comparate sunt caracterizare prin câte două valori fiecare. Metoda constă în a face ca una din cele două mării să fie adusă la aceeași valoare și în acest fel problema devine mai simplă, având astfel o singură necunoscută. Așezarea datelor, într-o astfel de problemă se face cu respectarea relațiilor stabilite între mărimi, astfel încât comparația dintre valorile aceleiași mărimi să fie pusă în evidență corect, așezând valorile de același fel unele sub altele. Rezolvarea problemei se face prin eliminarea succesivă a necunoscutelor până se ajunge la o relație cu o singură necunoscută.

Exemplu

1. 12 m de catifea și 5 m stofă costă 280 de lei și 6 m de catifea și 7 m de stofă costă 230 de lei. Cât costă 1 m de catifea și cât costă 1 m de stofă?

Rezolvare:

Datele problemei se pot scrie:

12 m catifea.................5 m stofă......................280 lei

6m catifea......................7 m stofă.....................230 lei

Dacă mărim cantitățile de catifea și stofă de 2 ori, luate a doua oară, datele problemei devin:

12 m catifea.................5 m stofă......................280 lei

12m catifea..................14 m stofă.....................460 lei

---

...............................9 m stofă................180 lei

$$1\ m\ stof\text{ă} = \frac{180}{9} = 20\ lei$$

12 m catifea.....................5·20 lei.................280 lei

12 m catifea.................... 100 lei ....280 lei

12 m catifea......................180 lei

$$1\ m\ catifea = \frac{180}{12} = 15\ lei$$

2. Să se afle cât costă o riglă și o radieră dacă 5 rigle și 15 radiere costă 45 de lei, iar 7 rigle și 15 radiere costă 51 de lei.

Rezolvare:

5 rigle..............15 radiere.......................45 lei

7 rigle..............15 radiere.......................51 lei

---

2 rigle...6 lei

$$1\ riglă = \frac{6}{2} = 3\ lei$$

5 ·3 lei.................15 radiere....................45 lei

15 lei...................15 radiere....................45 lei

15 radiere........................30 lei

$$1\ radieră = \frac{30}{15} = 2\ lei$$

3. Pentru 4 săpunuri și 3 paste de dinți s-au plătit 73 de lei, iar pentru 3 săpunuri și 3 paste de dinți s-au plătit 63 de lei. Cât costă un săpun și cât costă o pastă de dinți?

Rezolvare:

4 săpunuri...................3 paste de dinți..................73 lei

3 săpunuri...................3 paste de dinți..................63 lei

---

1 săpun ....10 lei

1 săpun= 10 lei

4·10 lei ....3 paste de dinți....................73 lei

40 lei ....3 paste de dinți....................73 lei

3 paste de dinți................................33 lei

$$1\ pastă\ de\ dinți = \frac{33}{3} = 11\ lei$$

1.1.6 Probleme de eliminare prin înlocuire

Problemele care se încadrează în acest tip se rezolvă înlocuind o mărime prin alta, pe baza relațiilor cantitative dintre ele. Aceste probleme, care se rezolvă folosind această metodă, pot fi clasificate astfel:

I. Probleme a căror formulare folosește expresiile comparative mai mare sau mai mic, mai mult sau mai puțin, mai scump sau mai ieftin, cu o anumită mărime, cantitate sau valoare, expresii cărora le corespund operații de adunare sau scădere;

II. Probleme a căror formulare folosește expresiile mai mare sau mai mic, mai mult sau mai puțin, mai scump sau mai ieftin, ”de un număr de ori”, expresii cărora le corespund operații de înmulțire sau împărțire;

Exemple:

I. Pentru iarnă, mama a cumpărat 80 kg de cartofi și 40 kg de ceapă, pentru care a plătit 480 de lei. Cât costă un kilogram de cartofi și un kilogram de ceapă, dacă se știe ca 1 kg de ceapă este cu 3 lei mai scump decât 1 kg de cartofi?

Rezolvare:

Cartofi(kg)	Ceapă(kg)	Lei
80	40	480

Înlocuind cartofii prin ceapă, înseamnă să adăugăm la valoarea totală câte 3 lei pentru fiecare kilogram de cartofi, în total 240 lei, atunci avem:

Cartofi(kg)	Ceapă(kg)	Lei
------------	80+ 40=120	480+240=720
------------	1	720:120=6
1	---------	6-3=3

Deci, 1 kg de cartofi costă 3 lei și 1 kg de ceapă costă 6 lei.

II. La o croitorie s-au cumpărat 28 m de stofă și 42 m de mătase, pentru care s-a plătit 1 512 lei. Dacă metrul de stofă este de 3 ori mai scump decât metrul de mătase, determinați cât costă 1 m din fiecare material.

Rezolvare:

Dacă metrul de stofă este de 3 ori mai scump decât metrul de mătase, înseamnă că în loc de 1 m de stofă, se pot lua în limitele aceleași sume 3 m de mătase, iar în loc de 28 m de stofă se pot lua 84 m mătase.

Stofă(m)	Mătase(m)	Lei
28	42	1512
-------	42+84=126	1512
-------	1	1512:126=12
1	-------	$12 \cdot 3=36$

Deci, 1 m stofă costă 36 de lei și 1 m mătase costă 12 lei.

1.1.7 Probleme care pot fi rezolvate prin metoda ipotezelor (metoda falsei ipoteze)

Problemele a căror rezolvare se bazează pe metoda presupunerilor sau ipotezelor, a falsei ipoteze, se pot clasifica în două categorii, în funcție de numărul ipotezelor care sunt necesare pentru orientarea raționamentului și determinarea rezultatelor.

Astfel se pot evidenția două categorii de probleme:

a) probleme pentru rezolvarea cărora este necesară o singură ipoteză;
b) b) probleme pentru rezolvarea cărora sunt necesare două sau mai multe ipoteze succesive.

Această metodă constă în a emite o ipoteză oarecare (deși de obicei se pleacă de la ipoteza ”toate de același fel”), nu în ideea de a găsi răspunsul, ci pentru a sesiza nepotrivirea cu enunțul și ce modificări trebuie să facem asupra ei. Deci, metoda poartă numele de metoda falsei ipoteze, deoarece aceasta se bazează pe presupunerea că ipoteza nu ar fi conformă cu adevărul.

Dacă se aplică o serie de încercări succesive, până la aflarea soluției, ar fi o rezolvare empirică. Comun cu o astfel de rezolvare este numai faptul că facem o încercare arbitrară ce o continuăm printr-un raționament.

Exemplu:

1) Dacă elevii unei clase se vor așeza câte 2 în bănci, atunci 7 dintre ei rămân în picioare, dacă în fiecare bancă se vor așeza câte 3 elevi, atunci 5 bănci vor rămâne neocupate. Să se afle numărul elevilor și numărul băncilor.

Rezolvare:

I. Presupunem că sunt 8 bănci, atunci numărul elevilor va fi:

$8 \cdot 2 + 7 = 23\ elevi$ dacă se vor așeza câte 2

Dacă se vor așeza câte 3: 8-5=3 bănci ocupate

$3 \cdot 3=9$ elevi

Diferența este 23-9=14 elevi.

I. Presupunem că sunt 8 bănci, atunci numărul elevilor va fi:

$8 \cdot 2 + 7 = 23\ elevi$ dacă se vor așeza câte 2

Dacă se vor așeza câte 3: 8-5=3 bănci ocupate

$3 \cdot 3=9$ elevi

Diferența este 23-9=14 elevi.

II. Presupunem că sunt 9 bănci, atunci numărul elevilor va fi:

$9 \cdot 2 + 7 = 25\ elevi$ dacă se vor așeza câte 2

Dacă se vor așeza câte 3: 9-5=4 bănci ocupate

$3 \cdot 4=12$ elevi

Diferența este 25-12=13 elevi.

III. Presupunem că sunt 10 bănci, atunci numărul elevilor va fi:

$10 \cdot 2 + 7 = 27\ elevi$ dacă se vor așeza câte 2

Dacă se vor așeza câte 3: 10-5=5 bănci ocupate

$3 \cdot 5=15$ elevi

Diferența este 27-15=12 elevi.

Se constată că mărind numărul băncilor cu 1, diferența dintre numărul elevilor se micșorează cu 1, Această diferență trebuie să fie 0. Pentru că numărul elevilor este același înseamnă că trebuie să mărim numărul de bănci cât am presupus inițial cu 14, deci vor fi.

14+8=22

Au fost:

22·2+7=51 elevi

Proba:

51:3=17 bănci

17+5=22 bănci

2) Problemă chineză veche: Într-o cușcă se află iepuri de casă și fazani, în total sunt 100 de picioare și 36 capete. Câți fazani și câți iepuri sunt în cușcă?

Rezolvare:

Presupunem că ar fi numai fazani, în acest caz ar fi:

$36\cdot 2 = 72$ picioare

Diferența de 100-72=28 picioare, arată faptul că în cușcă există și iepuri.

Un iepure are cu 2 picioare mai mult decât un fazan.

Aflăm numărul iepurilor împărțind diferența de 28 picioare la 2.

28:2=14 iepuri.

Sunt deci 14 iepuri și :

36-14=22 fazani.

3) Într-o curte sunt găini și oi, o persoană numără 100 de capete și 330 de picioare. Câte găini și câte oi erau în curte?

Rezolvare:

Presupunem că ar fi numai găini, în acest caz ar fi:

$100\cdot 2 = 200$ picioare

Diferența de 330-200=130 picioare, arată faptul că în cușcă există și oi.

O oaie are cu 2 picioare mai mult decât o găină.

Aflăm numărul oilor împărțind diferența de 130 picioare la 2.

130:2=65 oi.

Sunt deci 65 oi și :

100-65=35 fazani.

4) O echipă de instalatori au instalat 180 conducte pentru apă, unele de 8 m și altele de 6 m pe o distanță de 1240m. Câte conducte s-au instalat din fiecare fel?

Rezolvare:

Presupunem că ar fi numai conducte de 6 m, în acest caz ar fi:

$180 \cdot 6 = 1080$ m m

Diferența de 1240-1080=160 m, arată faptul că există și conducte de8 m.

Aflăm numărul conductelor de 8 m împărțind diferența de 160m la 2.

160:2=80 conducte de 8 m.

Sunt deci 80 conducte de 8 m :

180-80=100 conducte de 6 m .

5) Țăranii dintr-un sat au adus la piață 138 lăzi cu castraveți, unele de 8,5 kg, altele de 10,25 kg. Câte lăzi au fost din fiecare fel, dacă în total s-au transportat 1306 kg de castraveți?

Rezolvare:

Presupunem că sunt lăzi de 8,5 kg, în acest caz ar fi:

$138 \cdot 8{,}5 = 1173$ kg

Diferența de 1306-1173=133 kg, arată faptul că există și lăzi de 10,25 kg.

O ladă de 10,25 este mai grea decât o ladă de 8,5kg cu 1,75 kg.

Aflăm numărul lăzilor de 10,25 kg împărțind diferența de 133 la 1,75.

133:1,75=76 lăzi de 10,25kg.

Sunt deci 76 lăzi de 10,25kg și :

138-76=62 lăzi de 8,5 kg.

1.1.8 Probleme care pot fi rezolvate folosind metoda drumului invers

Cu ajutorul acestei metode se rezolvă problemele a căror date depind unele de altele succesiv. Această metodă constă în faptul că enunțul unei probleme trebuie urmărit de la sfârșit la început. Analizând operațiile făcute în problemă și cele pe care le fac elevii în rezolvarea problemei, se constată că în fiecare etapă se face operația inversă indicată în enunțul problemei.

Exemplu:

1) Am ales un număr, l-am înmulțit cu 5, la rezultat se adună 42, suma obținută se împarte la 7 iar din cât se scade 11, obținând 200. Ce număr a fost ales?
2) M-am gândit la un număr din care am scăzut 25, am înmulțit diferența cu 2 și am obținut 276. La ce număr m-am gândit?
3) Irina are o sumă de bani. În prima zi a cheltuit $\frac{1}{2}$ din sumă, a doua zi $\frac{1}{3}$ din rest, a treia zi $\frac{1}{2}$ din noul rest, iar a patra zi $\frac{1}{3}$ din suma rămasă. După aceste cheltuieli îi mai rămân 24 de lei. Ce sumă a avut la început.
4) Un țăran a vândut mere la 4 clienți. Primului client a vândut $\frac{1}{3}$ din cantitatea totală și încă 32 de mere, celui de-al doilea $\frac{1}{3}$ din ceea ce i-a rămas și încă 32 de bucăți, celui de-al treilea $\frac{1}{3}$ din ceea ce i-a rămas după al doilea și încă 32 de mere, celui de-al patrulea $\frac{1}{3}$ din ceea ce i-a rămas după al treilea și încă ultimele 32 de mere. Câte mere a cumpărat fiecare client?

5) Într-un magazin de confecții din totalul de costume care se află pe stoc, $\frac{2}{3}$ sunt pentru bărbați, $\frac{4}{5}$ din rest sunt pentru femei, $\frac{3}{4}$ din noul rest sunt pentru fetițe, iar restul de 4 sunt pentru băieți. Câte costume sunt în magazin?

1.1.9 Probleme de mişcare

Problemele de mișcare sunt problemele în care una din mărimile: spațiu (distanța), viteza sau timpul, când se cunosc două dintre ele sau diferite relații între acestea.

Spațiul (s) este lungimea drumului parcurs de un mobil (autoturism, tren, persoană, etc.) exprimat în unități de lungime (metri, multiplii sau submultiplii lui). Viteza (v) este exprimată prin numărul de unități de lungime parcurse de un mobil într-o unitate de timp, exprimată prin unități de lungime pe unități de timp. Timpul (t) este numărul de unități de timp (secunda, minute, ore, zile) în care se parcurge un spațiu.

În general, în problemele de mișcare se vorbește despre mișcarea uniformă a unui mobil, adică în intervalele de timp egale, mobilul parcurge distanțe (spații) egale după relația:

$$s = v \cdot t$$

Din această relație se poate deduce:

$$v = \frac{s}{t} \text{ și } t = \frac{s}{v}$$

La rezolvarea problemelor de mișcare se pot folosi atât metodele aritmetice generale și speciale, cât și cele algebrice. Problemele de mișcare pot fi clasificate în mai multe grupe:

a) Probleme ce conduc direct la rezolvări simple de aflare a spațiului, vitezei sau a timpului;
b) Probleme de întâlnire a mobilelor, când deplasarea se face în sensuri opuse;
c) Probleme de întâlnire a mobilelor, când deplasarea se face în același sens;
d) Probleme de compunere a vitezelor;
e) Probleme combinate

Pentru a pune în evidență cele arătate mai sus, se dau exemplele:

1) Doi turiști parcurg distanța A la B. Primul turist a sosit în B cu 2 ore mai târziu decât al doilea. Viteza primului turist este de 4 km/h, iar cel de-al doilea de 6 km/h. Dă se determine distanța de la A la B.

Rezolvare:

În fiecare oră, primul turist rămâne în urma celui de-al doilea cu 2 km. Până ce al doilea turist a ajuns în B, primul a rămas în urmă cu o distanță pe care a făcut-o în 2 ore, adică

$s = 4km \cdot 2h = 8km.$

Această rămânere în urmă s-a realizat într-un timp:

$t = 8km: 2km/h\ = 84h$

Deci, al doilea turist a mers o distanță de :

$s = 6km/h \cdot 4h24km = AB$

2) Un pieton care parcurge 5km/h pleacă din orașul A spre orașul B. În același timp, un biciclist pleacă din B spre A, cu viteza de 22 km/h. Între orașe este o distanță de 81 km. După cât timp se întâlnește pietonul cu biciclistul? La ce distanță de orașul B se întâlnesc?

Rezolvare:

În fiecare oră, distanța dintre pieton și biciclist se micșorează cu:

5km+22km=27km.

Distanța totală 81 km, va fi străbătută în timpul:

81:27=3 ore, aceasta fiind și timpul după care se întâlnesc.

Se întâlnesc la distanța de:

22km·3=66 km de orașul B

3) Un biciclist având viteza de 24 km/h, pleacă din orașul A. După 3 ore pleacă tot din A, în aceeași direcție, un motociclist având viteza de 42 km/h. În cât timp îl va ajunge motociclistul pe biciclist? La ce distanță de oraș?

Rezolvare:

Avansul biciclistului, adică distanța parcursă în 3 ore, este

AB=24km·3=72 km.

Motociclistul câștigă în fiecare oră:

42km-24km=18 km.

Pentru a câștiga cei 72 km, motociclistul merge un timp de

72km:18km/h=3 h, la întâlnire,

A=42km·4=168 km.

4) Un pieton a parcurs distanța, dus-întors, între două localități în 9 ore, la dus cu viteza de 4 km/h, iar la întoarcere cu viteza de 5 km/h. Să se afle distanța dintre cele două localități.

Rezolvare:

Presupunem că distanța dintre cele două localități este de 60 km.

Timpul la dus va fi: t1=60km:4km/h=15 h

Timpul la întors va fi: t2=60km:5km/h=12 h

Timpul total, adică dus și întors, va fi: t=12h+15h=27h.

Dar, în realitate timpul este mai mic decât cel din falsa ipoteză de 27h:9h=3 ori.

Dacă timpul este de 3 ori mai mic, atunci și drumul real va fi de 3 ori mai mic, deoarece spațiul și timpul sunt mărimi direct proporționale, atunci când viteza este constantă. Deci, drumul real dintre cele două localități este de:

60km:3=20km.

1.1.10 Probleme în care se combină mai multe metode

Acest gen de probleme se rezolvă prin îmbinarea a două sau mai multe metode învățate anterior. Alegerea metodei sau combinarea metodelor nu este un stereotip, este necesară inițiativa, dar în același timp și gândirea creatoare.

Există două tipuri de astfel de probleme:

- Combinate artificial, pentru a cere rezolvitorului să descompună problema dată într-o succesiune de probleme;
- Probleme unde este vorba de o îmbinare de fond a metodelor.

Pentru a pune în evidență cele arătate mai sus, se dau exemplele:

1) George a cumpărat găini și iepuri, erau 55 de capete și 152 de picioare și a plătit 11160 lei. În altă zi a cumpărat 54 de capete, iar numărul găinilor era cu 26 mai mare decât a iepurilor și a plătit 10560. Cât a costat o găină și cât a costat un iepure?

Rezolvare:

Aflăm mai întâi câte găini și iepuri a cumpărat prima dată, cu ajutorul falsei ipoteze.

Presupunem că ar fi numai găini. Atunci am avea 55·2=110 picioare.

Diferența 152-110=42 provine din faptul există și iepuri, deci:

42:2=21 iepuri,

Deci, avem 21 iepuri și

55-21=34 găini.

Aflăm numărul găinilor și iepurilor cumpărați a doua oară, cu ajutorul metodei grafice:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{iepuri} & |\text{-----}| \\ \text{găini} & |\text{-----}|+26 \end{array}\right\} 54$$

Deci numărul de iepuri este (54-26):2=14, deci avem 14+26=40 găini.

Acum în ultima etapă prin aducerea la același termen de comparație, aflăm prețul unei găini și al unui iepure.

34 găini....................42 iepuri................11160 lei

40 găini....................14 iepuri.................10560 lei

Deci:

68 găini....................42 iepuri................22320 lei

120găini....................42 iepuri.................31680 lei

120-68=52 găini.....................................31680-22320=9360 lei

1 găină=$\frac{9360}{52} = 180$

1 iepure=(1160-34 $\cdot$ 180):21=240 lei

2) O grindă de brad cântărește 24 kg, una de fag 26 kg, una de stejar 30 kg. Se știe că sunt 200 de grinzi diferite în care cele de fag sunt de 2 ori mai multe decât cele de brad și cântăresc 5132 kg. Câte grinzi sunt din fiecare?

Rezolvare:

Rezolvăm problema prin îmbinarea metodei grafice și a falsei ipoteze. Deci figurăm că sunt de 2 ori mai multe grinzi de fag:

FF FF

B B

S S

Dacă ar fi numai grinzi de stejar acestea ar cântării:

$$200 \cdot 30 = 6000\ kg$$

Diferența de 6000-5132=868 kg provine din faptul că grinzile de stejar sunt mai grele.

Dacă scoatem 3 grinzi de stejar și punem 2 de fag și una de brad, greutatea scade cu

$$3 \cdot 30 - 2 \cdot 26 - 24 = 14\ kg$$

Putem face atâtea înlocuiri de câte ori 14 se cuprinde în 868, adică:

868:14=62

Deci sunt 62 de grupe, adică 62 grinzi de brad, 124 de fag, și restul de 14 de stejar.

1.1.11 Probleme de împărțire a unui număr în părți proporționale

Se știe că două mărimi care depind una de cealaltă se numesc direct proporționale dacă:

a) una crește și cealaltă crește
b) una crește de n ori și cealaltă crește de n ori.

Se știe că două mărimi care depind una de cealaltă se numesc invers proporționale dacă:

a) una crește și cealaltă descrește
b) una crește de n ori și cealaltă descrește de n ori.

Mai multe rapoarte care au aceeași valoare formează un șir de rapoarte egale, adică :

$$\frac{a_1}{b_1} = k\ , \qquad \frac{a_2}{b_2} = k, \dots, \frac{a_n}{b_n} = k \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

Pentru a pune în evidență cele arătate mai sus, se dau exemplele:

1) Să se împartă numărul 3591 în 5 părți direct proporționale cu numerele 1; 0,3(8); 1,(1); 0,3(9) și 0,(72).

Rezolvare:

În primul rând trebuie transformate fracțiile zecimale în fracții ordinare:

$$0{,}3(8) = \frac{38-3}{90} = \frac{35}{90} = \frac{7}{18}$$

$$1,(1) = 1\frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

$$0{,}3(9) = \frac{39-3}{90} = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}$$

$$0{,}972) = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$$

Fie a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 cele 5 părți în care trebuie să împărțim numărul 3591, astfel încât ele să fie proporționale cu numerele 1; $\frac{7}{18}$; $\frac{10}{9}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{8}{11}$

Deci: $\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{\frac{7}{18}} = \frac{a_3,}{\frac{10}{9}} = \frac{a_4,}{\frac{2}{5}} = \frac{a_5}{\frac{8}{11}}$

Înmulțim șirul de egalități cu 990, adică c.m.m.m.c al numitorilor:

$$\frac{a_1}{990} = \frac{a_2}{385} = \frac{a_3}{1100} = \frac{a_4}{396} = \frac{a_5}{720} = \frac{3591}{3591} = 1$$

Deci $a_1 = 990$

a_2=385

a_3=1100

a_4=396

a_5=720

2) Trei numere sunt proporționale cu numerele 0,3; $\frac{2}{7}$,și 0,7 . Să se determine numerele știind că primul este mai mic decât al treilea cu 56.

Rezolvare:

Fie x, y, z numerele căutate.

Din faptul că acestea sunt proporționale cu0,3; $\frac{2}{7}$,și 0,7 se scrie astfel:

$\frac{x}{0,3} = \frac{y}{\frac{2}{7}} = \frac{z}{0,7} = k \Rightarrow x = 0,3k; y = \frac{2}{7}k; z = 0,7k$

Se mai știe că primul este mai mic decât al treilea cu 56, atunci:

z-x=65

0,7k-0,3k=56

0,4k=56

k=140$\Rightarrow x = 0,3k = 0,3 \cdot 140 = 42$

$y = \frac{2}{7}k = \frac{2}{7} \cdot 140 = 40$

$z = 0,7k = 0,7 \cdot 140 = 98$

3) Numitorul unei fracții este mai mic decât numărătorul cu 736. Să se afle această fracție, știind că prin simplificare se transformă în fracția $\frac{8}{5}$.

Rezolvare:

Fie $\frac{x}{y}$ fracția căutată.

După simplificare fracția se transformă în $\frac{8}{5} \Rightarrow \frac{x}{y}$ este de forma:

$$\frac{8p}{5p} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{5} \Rightarrow x = 8p \text{ și } y = 5p$$

Dar numitorul este mai mic decât numărătorul cu 738

$$x - y = 738 \Longrightarrow 8p - 5p = 738 \Longrightarrow 3p = 738 \Longrightarrow p = 246$$

Deci:

$$x = 8p = 8 \cdot 246 = 1968$$

$$y = 5p = 5 \cdot 246 = 1230$$

Fracția căutată este :$\frac{1968}{1230}$

1.1.12 Probleme de amestec și aliaje

O categorie specială în suita problemelor tipice o reprezintă problemele de amestec și aliaje, care sunt deosebit de utile mai ales din punct de vedere al aplicabilității lor practice.

Există două tipuri de probleme cu aliaje:

1) probleme de amestec și aliaje de categoria I
2) probleme de amestec și aliaje de categoria a II-a.

Probleme de amestec și aliaje de categoria I:

Se dau:

a) cantitățile ce se amestecă: $m_1, m_2, \dots, m_n$
b) calitățile lor: $c_1, c_2, \dots, c_n$

Se cere calitatea amestecului.

Calitățile diverselor obiecte, lucruri, mărfuri, etc. ce se amestecă se exprimă prin lei, grade de temperatură, grade de tărie, valori de note școlare, etc., precum și prin titlu, în cazul aliajelor. Prin titlul unui aliaj, notat cu litera T, se înțelege raportul dintre masa metalului prețios (m) și masa întregului aliaj(M), deci:

$$T = \frac{m}{M}$$

De exemplu, prin titlul unui aliaj de aur de 0,725 înțelegem că la 1000g de aliaj avem 725 g de aur pur și 275 g metal cu care s-a amestecat aurul.

Teorema 1: Dacă amestecăm materialele de calități $c_1, c_2, \dots, c_n$ și cu ponderile $m_1, m_2, \dots, m_n$ calitatea amestecului C se va calcula după formula:

$$C = \frac{m_1 c_1 + m_2\ c_2 + \ \dots + m_n\ c_n}{m_1 + m_2 + \ \dots + m_n}$$

Această teoremă poate fi aplicată în următorul exemplu: Un elev la istorie obține notele: 10,10,10,9,9,8,8,8,8,5. Adunând valorile notelor și împărțind rezultatul la numărul lor obținem media semestrială a elevului, adică

$$\frac{10 + 10 + 10 + 9 + 9 + 8 + 8 + 8 + 8 + 5}{10} = 8{,}5$$

S poate observa că în alcătuirea acestei medii (un ”amestec” de note) nota 10 apare de 3 ori, nota 9 de 2 ori, nota 8 de 4 ori și nota 5 o dată, și astfel relația de mai sus se poate scrie:

$$\frac{10 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 5 \cdot 1}{3 + 2 + 4 + 1}$$

Matematic, spunem că nota 10 intră în alcătuirea mediei cu o pondere de 3, nota 9 cu o pondere de 2, nota 8 cu o pondere de 4 și nota 5 cu o pondere de 1.

Pentru a pune în evidență cele arătate mai sus, se dau exemplele:

1) Au fost amestecate 300g apă încălzită la temperatura de $25^{\circ}C$ împreună cu 200 g apă la temperatura de $29^{\circ}C$ și 125 g apă la temperatura de $40^{\circ}C$. Să se determine temperatura amestecului.

   Rezolvare:

   Calitatea apei este dată de temperatura în grade, adică:

$$C = \frac{300 \cdot 25 + 200 \cdot 29 + 125 \cdot 40}{300 + 200 + 125} = \frac{7500 + 5800 + 5000}{625} = \frac{18300}{625} = \ 29{,}264^{\circ}C$$

2) Un atelier de bijuterie a topit aur de trei calități, 3 kg cu titlul 0,700, 2kg cu titlul 0,300; 4 kg cu titlul 0,850 și 1 kg cu titlul 0,650. Care este titlul noului aliaj?

   Rezolvare:

$$T = \frac{3 \cdot 0{,}700 + 2 \cdot 0{,}800 + 4 \cdot 0{,}850 + 1 \cdot 0{,}650}{3 + 2 + 4 + 1} = \frac{2{,}100 + 1600 + 3{,}400 + 0{,}650}{10} = \frac{7{,}750}{10} = 0{,}775$$

Probleme de amestec și aliaje de categoria a II-a.

Se dau:

c) Cantitățile ce se amestecă;
d) Calitatea amestecului;
e) Cantitatea totală de amestec;

Se cer cantitățile ce se amestecă.

Aceste probleme se rezolvă prin două metode:

I. Tratându-le ca probleme de presupunere cu metoda falsei ipoteze;
II. Cu ajutorul teoremei 2;

Teorema 2: Raportul cantităților ce se amestecă este egal cu raportul invers al abaterilor față de medie.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{c - c_2}{c_1 - c}$$

Unde m_1 și m_2 sunt cantitățile ce se amestecă, c_1 și c_2 reprezintă calitățile lor, iar c este calitatea amestecului.

Această metodă este evidențiată de problema următoare: S-au amestecat 15 kg de făină industrială de două calități: de 56 lei kg și 38 lei kg. Câtă făină de fiecare calitate a intrat în amestec știind că întregul a costat 750 de lei?

Rezolvare:

I. Prin metoda presupunerii:

Presupunem că toată făina este de calitatea I, adică 5,6 lei kg.

1) Aflăm cât costă pe baza acestei presupuneri făina:
   $56 \cdot 15 = 840$ (lei)
2) Aflăm cu cât am obținut mai mult pe baza presupunerii:
   840-750=90 (lei)
3) Cu câți lei am calculat mai mult pentru fie care kg de făină de calitatea a II-a?
   56-38=18 (lei)
4) Câte kg de calitatea a II-a au fost?
   90:18=5 (kg)
5) Câte kg de calitatea I au fost?
   15-5=10 (kg)

II. Prin metoda a II-a

Costul unui kilogram de făină a amestecului este 750:15=50 (lei)

Fie m_1 cantitatea de făină de calitatea I și m_2 cantitatea de făină de calitatea a II-a.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{50-38}{56-50} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{m_1}{2} = \frac{m_2}{1} = \frac{m_1+m_2}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

Deci: $m_1 = 2 \cdot 5 = 10$

$m_2 = 1 \cdot 5 = 5$

1.1.13 Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și sistemelor de ecuații

Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor este de multe ori mai ușoară decât cea pe calea raționamentului aritmetic, din această cauză elevii înțeleg utilitatea efortului depus pentru însușirea calcului algebric. În același timp se creează posibilitatea generalizării tuturor problemelor de același fel. Toate problemele care se pot rezolva aritmetic se rezolvă și algebric, dar sunt probleme a căror rezolvare nu este posibilă pe calea raționamentului aritmetic.

Rezolvarea ecuațiilor și sistemelor de ecuații se face printr-o metodă bine determinată, care pune la încercare gândirea. Pentru a rezolva o problemă algebric se notează necunoscutele cu litere, de obicei x, y, z. După ce s-au fixat numerele se scriu relațiile dintre mărimi cu ajutorul simbolurilor matematice, astfel se ajunge la o ecuație sau un sistem de ecuații care se rezolvă ușor. La final urmează interpretarea rezultatului sau aflarea limitelor între care pot varia valorile datelor și examinarea tuturor cazurilor. După ce s-a rezolvat o problemă, este recomandat să se facă verificarea ei.

Pentru exemplificarea acestei metode, sunt date următoarele probleme:

1) De pe un lot s-au strâns kg legume și anume: de 3 ori mai mulți cartofi decât morcovi și cu 50 kg mai multă varză decât morcovi. Cât s-a strâns din fiecare fel de legume?
   Rezolvare:

Se stabilește să se ia ca necunoscută cantitatea de morcovi, deoarece în raport cu ea se pot stabili ușor celelalte cantități de legume, deci notăm cu x cantitatea de morcovi, 3x cantitatea de cartofi și x+50 cantitatea de varză.

Numărul total de kg de legume este 550, deci:

$3x+x+x+50=550$

$5x+50=550$

$x=100$

Deci au fost 100 kg de morcovi,

$100 \cdot 3 = 300$ kg cartofi

100+50=150 kg varză

Verificare:

100+300+150=550kg.

2) Dacă în fiecare bancă a unei clase se vor așeza câte 2 elevi rămân 3 în picioare; dacă se vor așeza câte 3 elevi într-o bancă rămân 4 bănci libere. Câți elevi și câte bănci sunt?

Rezolvare:

Se fixează în primul rând necunoscutele, luăm ca necunoscută numărul băncilor din clasă pe care-l notăm cu x.

Numărul elevilor, dacă se vor așeza câte 2 este 2x+3, iar dacă se vor așeza câte 3 va fi 3(x-4).

Deci:

$2x+3=3(x-4)$.

$2x+3=3x-12$

$x=15$

Numărul băncilor este , iar cel al elevilor va fi: $2 \cdot 15 + 3 = 33$ elevi.