OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

BAREM CORECTARE – ETAPA JUDEȚEANĂ

CLASA a VI-a 16.03.2024

Problema 1. (7 puncte)

Se consideră mulțimile A și B, finite și nedisjuncte. Dacă cardinalul mulțimii $A \cap B$ reprezintă 25% din cardinalul mulțimii A și 20% din cardinalul mulțimii B, să se determine cât la sută reprezintă cardinalul mulțimii $A \setminus B$ din cardinalul mulțimii $B \setminus A$.

Soluție:

Fie card A = a și card B = b. Avem atunci:

$\mathrm{card}(A\cap B) = 25\%\ a = 20\%\ b \Rightarrow \frac{25}{100}a = \frac{20}{100}b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{5}$..**(1p)**

$\mathrm{card}(A\setminus B) = \mathrm{card}\ A \setminus \mathrm{card}(A \cap B) = a - 25\%\ a = 75\%\ a = \frac{3}{4}a$ ....**(2p)**

$\mathrm{card}(B\setminus A) = \mathrm{card}\ B \setminus \mathrm{card}(A \cap B) = b - 20\%\ b = 80\%\ b = \frac{4}{5}b$ ....**(2p)**

$\mathrm{card}(A\setminus B) = x\% \cdot \mathrm{card}(B \setminus A) \Rightarrow \frac{3}{4}a = \frac{x}{100} \cdot \frac{4}{5}b \Rightarrow x = 100 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \Rightarrow x = 75 \Rightarrow x\% = 75\%$..........**(2p)**

Problema 2. (7 puncte)

Numerele naturale nenule a, b, c, d sunt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{2}, \frac{1}{3a}, \frac{1}{4b}, \frac{1}{5c}$, iar

$2a + \frac{2b}{3a} + \frac{c}{2b} + \frac{4d}{5c} = 24$.

a) Să se determine numerele a, b, c, d.

b) Stabiliți dacă, adunând, câte două, câte trei, sau câte patru numerele a, b, c, d se poate obține un număr natural pătrat perfect.

Soluție:

a) $\frac{a}{2} = \frac{b}{3a} = \frac{c}{4b} = \frac{d}{5c} = k, k \neq 0$ ....**(1p)**

$a = 2k;\ \frac{b}{3a} = k \Rightarrow \frac{2b}{3a} = 2k;\ \frac{c}{4b} = k \Rightarrow \frac{2c}{4b} = \frac{c}{2b} = 2k;\ \frac{d}{5c} = k \Rightarrow \frac{4d}{5c} = 4k$..**(2p)**

$4k + 2k + 2k + 4k = 24 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow a = 4, b = 24, c = 192, d = 1920$ ....**(2p)**

b) Se obțin următoarele sume: 28, 196, 1924, 216, 1944, 2112, 220, 1948, 2116, 2136, 2140.

$a + c = 196 = 14^2$ și $a + c + d = 2116 = 46^2$ sunt pătrate perfecte ....**(2p)**

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!

Problema 3. (7 puncte)

Determinați numerele întregi x pentru care fracția $\frac{x^2+4}{x+2}$ este număr întreg.

Soluție:

$\left.\begin{array}{l} x+2|x^2+4 \\ x+2|x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2|x^2+4 \\ x+2|x^2+2x \end{array}\right\} \Rightarrow x+2|2x-4$ ……………………………………......………**(3p)**

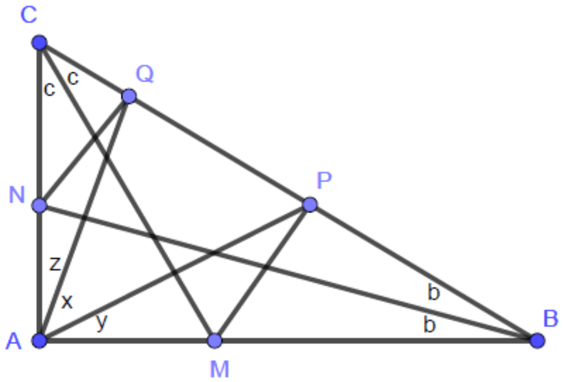
$\left.\begin{array}{l} x+2|2x-4 \\ x+2|x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2|2x-4 \\ x+2|2x+4 \end{array}\right\} \Rightarrow x+2|8$ ……….……………………………………......………**(3p)**

$x+2 \in D_8 = \{-8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8\} \Rightarrow x \in \{-10; -6; \ -4; \ -3; \ -1; 0; 2; 6\}$ ……….......………**(1p)**

Problema 4. (7 puncte)

Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle BAC = 90°$. Bisectoarele interioare ale unghiurilor ABC și ACB intersectează laturile AC și AB în punctele N, respectiv M. Notăm cu P și Q picioarele perpendicularelor duse din M și N pe BC. Aflați măsura unghiului PAQ.

Soluție:



Desen corect ………......………………….....……**(1p)**

CM bisect $\Rightarrow$ *MA=MP* $\Rightarrow$ ΔMAP *isoscel* $\Rightarrow \sphericalangle MAP = \sphericalangle MPA = y$

$\sphericalangle AMP$ *ext* $\Delta MBP \Rightarrow \sphericalangle AMP = 2b + 90°$ ………......……………………......……**(2p)**

BN bisect $\Rightarrow$ *NA=NQ* $\Rightarrow$ ΔNAQ *isoscel* $\Rightarrow \sphericalangle NAQ = \sphericalangle NQA = z$

$\sphericalangle ANQ$ *ext* $\Delta NCQ \Rightarrow \sphericalangle ANQ = 2c + 90°$ ………......……………………..……**(2p)**

$y = \frac{180° - \sphericalangle AMP}{2} = \frac{180° - 90° - 2b}{2} = 45° - b \ ; \ z = \frac{180° - \sphericalangle ANQ}{2} = \frac{180° - 90° - 2c}{2} = 45° - c$ …………………**(1p)**

Atunci $x = 90° - y - z = b + c = \frac{\sphericalangle B + \sphericalangle C}{2} = 45°$………......……………………………....…...……**(1p)**