

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală - 8. 02. 2026

Clasa a V - a

1. Feladat

A táblára fel van írva az összes olyan természetes szám, amely csak 9-es számjegyekből áll és leg több 30 számjegye van, vagyis $9, 99, 999, \dots, \overbrace{99 \dots 999}^{30 \text{ számjegy}}$. Jelöljük az összegüket S -el.

- Határozd meg az S szám számjegyeinek összegét.
- Igazold, hogy a táblára felírt bármely szám kisebb, mint $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{99}$.
- Alina letöröl a tábláról néhány számot és kiszámítja az összegüket. Ki tud-e választani Mihai a táblán maradt számok közül néhányat úgy, hogy ugyanazt az összeget kapja, mint Alina?

2. Feladat

Tekintsük az $1, 3, 4, 7, 1, 8, \dots$ sorozatot, ahol a harmadik tagtól kezdve a sorozat bármely tagja az előző két tag összegének utolsó számjegyével egyenlő. Legyen S_n a sorozat első n tagjának az összege.

- Igazold, hogy S_{25} egy teljes négyzet (négyzetszám).
- Határozd meg az n természetes számot úgy, hogy $S_n = 2026$ legyen.
- Igazold, hogy bármely n nullától különböző természetes szám esetén az S_n utolsó négy számjegye nem lehet 2025.

3. Feladat

Legyen $a = 2^{2^3} : (2^2)^3 \cdot (2^2 + 2 + 1)^2 - 2$. Határozd meg a b és c természetes számokat, amelyekre $a + 2^b = c^2$.

4. Feladat

Kártyákra, amelyek piros, kék vagy zöld színűek lehetnek, 31 egymást követő természetes számot írtak. Minden számot elosztunk 3-mal. Ha a kapott maradék 0, akkor a szám egy piros kártyára van írva, ha a kapott maradék 1, akkor kék kártyára, ha a kapott maradék 2, akkor pedig zöldre. Mária elveszi az összes zöld kártyát. Anna a másik két szín közül választ egyet, és elveszi az összes ahhoz a színhez tartozó kártyát. Az Anna kártyáira írt számok összege 2025-tel nagyobb, mint Mária kártyáira írt számok összege.

Határozd meg, hogy hány kártyája van Annának, és melyik a legkisebb a 31 szám közül.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2026

Clasa a VI - a

1. Feladat

Adottak az $a=10n+7$ és $b=14n+9$ természetes számok. Igazold, hogy bármely n természetes szám esetén az a és b számok legkisebb közös többszöröse egyenlő a szorzatukkal!

2. Feladat

Legyenek AOB, BOC, COD és DOA az O pont körüli szögek úgy, hogy $6 \cdot m(\angle COD) = 7 \cdot m(\angle BOC)$, $10 \cdot m(\angle AOB) = 7 \cdot m(\angle AOD)$ és az AOD és BOC szögek szögfelezői által alkotott szög egyenesszög legyen.

- Igazold, hogy az AOB és COD szögek kongruensek!
- Határozd meg az AOB, BOC, COD és DOA szögek mértékét!

3. Feladat

Adott az $M = \{1, 2, 3, \dots, 24\}$ halmaz. Igazold, hogy bárhogyan választunk ki 17 különböző számot az M halmazból, létezik a kiválasztott számok között két olyan szám, amelyek szorzata négyzetszám (teljes négyzet)!

4. Feladat

Az AB szakaszon felvesszük az $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ pontokat ebben a sorrendben úgy, hogy $AM_1 = x$, $M_1M_2 = 2AM_1$, $M_2M_3 = 2AM_2$, $M_3M_4 = 2AM_3$, ..., $M_{n-1}M_n = 2AM_{n-1}$, $M_nB = 2AM_n$, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

- Számítsd ki az M_3M_5 szakasz hosszát, ha $x = 2$ cm!
- Tudva, hogy $AB = 2187x$, határozd meg az n természetes számot!

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală - 8. 02. 2026

Clasa a VII - a

1. Feladata) Számítsd ki: $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{6})^2} + \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{7})^2} + \dots + \sqrt{(\sqrt{2024} - \sqrt{2025})^2}$.b) Határozd meg az a és b racionális számokat, amelyekre $3a - b\sqrt{3} = 2 - b + \sqrt{3}$.**2. Feladat**Legyen I az ABC háromszögbe írt kör középpontja, a D, E és F pontok pedig ennek a körnek a BC, AC valamint AB oldalakkal való érintési pontjai. Tudva, hogy $m(\angle A) = 60^\circ$ és $AE = 8$ cm, határozd meg:

a) EF hosszát

b) PQ hosszát, ahol $BI \cap DF = \{P\}$ és $CI \cap DE = \{Q\}$.**3. Feladat**

Antónia úgy szeretné kitölteni egy 2025 sorból és 2026 oszlopból álló táblázat celláit természetes számokkal, hogy minden sor és minden oszlop tartalmazzon legalább egy nullától különböző számot. A következő szabályt kell betartania: minden olyan cella esetén, amely nullától különböző számot tartalmaz, a cella sorában levő számok összege egyenlő kell legyen a cella oszlopában szereplő számok összegével. Állapítsd meg, hogy ki tudja-e tölteni Antónia a táblázatot vagy sem.

4. Feladat

Az ABCD négyzetben legyen P az AB oldal, Q pedig a BC oldal felezőpontja.

a) Igazold, hogy AQ és DP egyenesek merőlegesek egymásra!

b) Igazold, hogy az ADP és PDS szögek kongruensek, ahol S a BQ szakasz felezőpontja.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală - 8. 02. 2026

Clasa a VIII - a

1. Feladat

Adottak az $a_n = \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{7}{2 \cdot 3} + \frac{13}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{n^2 - n + 1}{(n-1)n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ számok. Az a_n szám egész részét $[a_n]$ -nel, az a_n szám törtrészét pedig $\{a_n\}$ -nel jelöljük.

- Számítsd ki $[a_2]$ -t és $\{a_3\}$ -t.
- Igazold, hogy $\frac{n^2 - n + 1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$, ahol $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.
- Határozd meg $[a_{2026}]$ és $\{a_{2026}\}$ értékét.

2. Feladat

Az $ABCD A' B' C' D'$ téglatestben az $AC = m$, $AB' = n$, $AD' = p$ átlók hosszára igaz a következő összefüggés:

$$\sqrt{m^2 - 4\sqrt{3}m + 13} + \sqrt{n^2 - 4\sqrt{5}n + 29} + \sqrt{p^2 - 8p + 20} \leq 6.$$

- Számítsd ki a $B'CD'$ háromszög területét.
- Határozd meg az A' pont távolságát a $B'O$ egyenestől, ahol $\{O\} = AC \cap BD$.

3. Feladat

Oldd meg az egész számok halmazán az $x^2(y+1) + y^2(x+1) = 1$ egyenletet.

4. Feladat

a) Legyen $ABCD$ egy olyan tetraéder, amelyben a szemközti élek kongruensek és legyen M az (AB) élen egy pont. Jelöljük P -vel az (AD) él azon pontját, amelyre az $MP + PC$ összeg minimális, és jelöljük Q -val a (BD) él azon pontját, amelyre az $MQ + QC$ összeg minimális. Igazold, hogy:

$$\frac{MP}{PC} + \frac{MQ}{QC} = 1.$$

b) Legyen $ABCD$ egy tetraéder úgy, hogy $AB \perp CD$ és $AD \perp BC$. Igazold, hogy $AC \perp BD$.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală - 8. 02. 2026

Clasa a IX - a

1. Feladata) Igazold, hogy bármely a, b és c valós szám esetén $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + ac + bc)$.b) Legyenek a, b, c pozitív valós számok, melyek összege 3. Igazold, hogy:

$$\frac{a}{2b+3} + \frac{b}{2c+3} + \frac{c}{2a+3} \geq \frac{3}{5}.$$

2. FeladatAdott az ABC háromszög és az $E \in (AB)$ és $F \in (AC)$ pontok úgy, hogy $\frac{AE}{EB} = \frac{4}{3}$ és $\frac{FC}{FA} = \frac{1}{4}$.Az EF egyenes a G pontban metszi az AD ($D \in (BC)$) oldalfelezőt. Igazold, hogy G az ABC háromszög súlypontja.**3. Feladat**Oldd meg az $\left\lfloor \frac{x-3}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x-2}{3} \right\rfloor$ egyenletet.**Megjegyzés.** $\lfloor a \rfloor$ az a valós szám egész részét jelöli.**4. Feladat**Igazold, hogy $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) < 3$, bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală - 8. 02. 2026

Clasa a X - a

1. FeladatLegyenek $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ úgy, hogy $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.a) Ha $z_1 + z_2 + z_3 = 1$, számítsd ki $\frac{1}{z_1^3} + \frac{1}{z_2^3} + \frac{1}{z_3^3}$;b) Ha $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ és $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, határozd meg $|z_1 + z_2 + z_3|$.**2. Feladat**Adott a következőképpen értelmezett függvény $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.a) Igazold, hogy az f függvény nem injektív és nem szürjektív;b) Számítsd ki $f\left(\frac{1}{2026}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2025}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) \cdot \frac{1}{f(2)} \cdot \dots \cdot \frac{1}{f(2026)}$.**3. Feladat**Mutassátok ki, hogy ha az x , y és z páronként különböző pozitív valós számok teljesítik a

$$\frac{\lg x}{y-z} = \frac{\lg y}{z-x} = \frac{\lg z}{x-y} \text{ összefüggést, akkor } x^x y^y z^z = 1.$$

4. FeladatHatározzátok meg azokat az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre $f(0) \neq -1$ és amelyek teljesítik az

$$f(x \cdot f(y) + f(x+y)) = y \cdot (f(x) + 1) + f(x)$$

összefüggést, bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2026

Clasa a XI - a

1. Feladat

Adottak a $C = \begin{pmatrix} 2025 & 1 \\ 2026 & 1 \end{pmatrix}$ és $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ mátrixok úgy, hogy $AB = C$. Igazold, hogy $BA - (BA)^{-1} = 2026 \cdot I_2$.

2. Feladat

Feltételezve, hogy az $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ határérték létezik és véges, számítsd ki ennek az értékét az $x = 3t$ változócsere alkalmazva.

3. Feladat

Adott az $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ mátrix. Igazold, hogy az A^n mátrix nyoma egyenlő $1 + 2^n$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

4. Feladat

Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(n\pi \cdot \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 4n - 5} \right)$ határértéket.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală - 8. 02. 2026

Clasa a XII - a

1. Feladat

Számítsd ki:

a) $\int \frac{dx}{x \cdot \left(1 + x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x \cdot \dots \sqrt[2026]{x}}}} \right)}, \quad x \in (0, +\infty);$

b) $\int \frac{dx}{x^4 + 3x^2 + 1}$ și $\int \frac{x^2}{x^4 + 3x^2 + 1} dx, \quad x \in (0, +\infty).$

2. Feladat

Legyen $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amelynek van primitív függvénye és teljesíti a következő összefüggést:

$$f(x) \cdot \sin x - f(\pi - x) = \cos^2 x, \quad \forall x \in [0, \pi].$$

Határozd meg az f függvényt és az f primitív függvényeit!

3. Feladat

Legyen $(G, \cdot)$ egy csoport és H pedig olyan valódi részhalmaza G -nek $(H \neq \emptyset, H \neq G)$, amelyre bármely $x \in H$ és $y \in G - H$ esetén teljesül az $x \cdot y \in G - H$ összefüggés. Igazold, hogy H részcsoportja G -nek.

4. Feladat

A $G = [0, 1)$ halmazon értelmezzük az $x * y = \{x + y\}$ műveletet.

a) Igazold, hogy $(G, *)$ Abel-féle csoport;

b) Igazold, hogy bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén a $(G, *)$ csoportnak van egy olyan részcsoportja, amely izomorf a $(\mathbb{Z}_n, +)$ csoporttal.

Megjegyzés. $\{a\}$ az a valós szám törtrészét jelenti.