

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapă locală - 8. 02. 2026
BAREM DE CORECTARE - Clasa a V - a

Problema 1. Pe o tablă sunt scrise toate numerele naturale formate doar cu cifre de 9 care au cel mult 30 de cifre, adică $9, 99, 999, \dots, \underbrace{99 \dots 999}_{30 \text{ cifre}}$. Notăm cu S suma lor.

- a) Determinați suma cifrelor numărului S .
b) Demonstrați că orice număr scris pe tablă este mai mic decât $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{99}$.
c) Alina șterge de pe tablă câteva numere și calculează suma lor. Poate alege Mihai câteva numere din cele rămase pe tablă pentru a obține aceeași sumă cu Alina?

Barem de corectare.

a) $S = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99 \dots 999}_{30 \text{ cifre}} = 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{30} - 30$
 $= \underbrace{111 \dots 10}_{30 \text{ cifre}} - 30 = \underbrace{111 \dots 1080}_{28 \text{ cifre}} \quad (5p)$

Suma cifrelor numărului S este 36. **(2p)**

b) $2A - A = 2 + 2^2 + \dots + 2^{99} + 2^{100} - 1 - 2 - 2^2 + \dots - 2^{99} = 2^{100} - 1$, unde $A = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{99}$ **(4.5p)**

Cel mai mare număr scris pe tablă este $\underbrace{99 \dots 999}_{30 \text{ cifre}} = 10^{30} - 1$ **(2p)**

Dar $10^{30} = (10^3)^{10} < (2^{10})^{10} = 2^{100}$, deci $\underbrace{99 \dots 999}_{30 \text{ cifre}} < A$ **(2p)**

c) Fie $x = \underbrace{99 \dots 999}_n$, unde $n \leq 30$, cel mai mare număr dintre cele alese de cei doi copii. Putem

presupune că el este ales de Alina, prin urmare suma Alinei e mai mare sau egală cu x .

Deoarece Mihai poate obține cel mult suma $9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99 \dots 999}_{n-1 \text{ cifre}} < 10 + 100 + \dots +$

$10^{n-1} < \underbrace{111 \dots 10}_{n-1 \text{ cifre}} < x$, răspunsul e negativ. **(7p)**

Problema 2. Se consideră șirul $1, 3, 4, 7, 1, 8, \dots$, unde orice termen, începând cu al treilea, este egal cu ultima cifră a sumei ultimilor doi termeni precedenți. Notăm S_n suma primilor n termeni ai șirului.

- a) Arătați că S_{25} este pătrat perfect.
b) Determinați numărul natural n , astfel încât $S_n = 2026$.
c) Arătați că oricare ar fi numărul natural nenul n , S_n nu poate avea ultimele patru cifre 2025.

Barem de corectare.

a) Calculând primii termeni ai șirului: $1, 3, 4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3, 9, 2, 1, 3, \dots$, se observă că termenii șirului se repetă din 12 în 12. **(4.5p)**

Deoarece suma a 12 termeni consecutivi este $1 + 3 + 4 + 7 + 1 + 8 + 9 + 7 + 6 + 3 + 9 + 2 = 60$ avem $S_{25} = 2 \cdot 60 + 1 = 121 = 11^2$ deci S_{25} este pătrat perfect. **(3p)**

- b) Grupăm termenii sumei S_n câte 12. Fie k numărul de grupe complete de câte 12 termeni. Atunci $S_n = 60k + r$, unde r reprezintă suma termenilor negrupați deci $r < 60$. (4p)

Deoarece $2026 = 60 \cdot 33 + 46$, avem $k = 33$ și $r = 46$. (2p)

Cum suma primilor 9 termeni este 46, mai avem 9 termeni, deci $n = 12 \cdot 33 + 9 = 405$. (2p)

- c) Dacă numărul S_n s-ar termina în 2025, atunci $u(S_n) = u(60k + r) = u(r) = 5$

Dintre sumele primilor cel mult 12 termeni (de la începutul perioadei), singura care se termină în cifra 5 este $1 + 3 + 4 + 7 = 15$, deci $r = 15$ (3p)

Astfel dacă $S_n = \overline{\dots 2025}$, atunci $60k + 15 = \overline{\dots 2025}$, deci $60k = \overline{\dots 2010}$,

de unde $6k = \overline{\dots 201}$. (3p)

Dar $6k$ este număr par, deci nu se poate termina în 1; prin urmare, S_n nu se poate termina în 2025. (1p)

Problema 3. Fie $a = 2^{2^3} : (2^2)^3 \cdot (2^2 + 2 + 1)^2 - 2$. Să se afle numerele naturale b și c pentru care $a + 2^b = c^2$.

Barem de corectare.

$$a = 2^8 : 2^6 \cdot 7^2 - 2 = 194 \text{ (10p)}$$

Deoarece c^2 este pătrat perfect rezultă că $a + 2^b = 194 + 2^b$ este pătrat perfect. (4.5p)

Pentru $b \geq 2$, $194 + 2^b = 194 + 4 \cdot 2^{b-2} = 4(48 + 2^{b-2}) + 2$ dă restul 2 la împărțirea cu 4, prin urmare nu poate fi pătrat perfect. Atunci b poate fi doar 0 sau 1. (5p)

Pentru $b = 1$ obținem $c = 14$. Iar pentru $b = 0$ obținem $c^2 = 195$, care nu este pătrat perfect. Deci $b = 1, c = 14$. (3p)

Problema 4. Pe cartonașe de trei culori – roșu, albastru și verde – sunt scrise 31 de numere naturale consecutive. Pentru fiecare număr se face împărțirea la 3. Dacă se obține restul 0, numărul este scris pe un cartonaș roșu; dacă se obține restul 1, pe un cartonaș albastru; iar dacă se obține restul 2, pe un cartonaș verde. Maria ia toate cartonașele verzi. Ana alege una dintre celelalte două culori și ia toate cartonașele de acea culoare. Suma numerelor scrise pe cartonașele Anei este cu 2025 mai mare decât suma numerelor scrise pe cartonașele Mariei.

Determinați câte cartonașe are Ana și care este cel mai mic dintre cele 31 de numere.

Barem de corectare.

Resturile la împărțirea cu 3 se repetă din 3 în 3, deci o culoare apare de 11 ori, iar celelalte două de 10 ori. (6p)

Dacă Ana ar avea 10 cartonașe, suma ei ar fi mai mică sau ar fi cel mult cu 20 mai mare decât suma Mariei; deci Ana are 11 cartonașe. (6p)

Fie a cel mai mic dintre numere. Suma numerelor de pe cartonașele Anei este $a + (a + 3) + \dots + (a + 30)$ (3p)

Dacă Ana are cartonașele roșii atunci suma numerelor de pe cartonașele Mariei este $(a + 2) + (a + 5) + \dots + (a + 29)$ deci obținem $a + 10 = 2025$ de unde $a = 2015$ care nu convine deoarece 2015 este pe un cartonaș verde. (3p)

Dacă Ana are cartonașele albastre atunci suma numerelor de pe cartonașele Mariei este $(a + 1) + (a + 4) + \dots + (a + 28)$ deci obținem $a + 20 = 2025$ de unde $a = 2005$ care convine deoarece este albastru. Deci cel mai mic dintre numere este 2005. (4.5p)

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2026

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI – a

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Problema 1. Fie numerele naturale $a=10n+7$ și $b=14n+9$. Să se demonstreze că cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b este produsul lor, pentru orice valoare a numărului natural n . **(22,5p)**

Barem de corectare.

- $[a,b]=ab$ dacă și numai dacă a și b sunt prime între ele 6p
Dacă d este un divizor comun atunci $d \mid a$ și $d \mid b$ 6p
Deci $d \mid 7a-5b$, adică $d \mid 4$ 6p
Deoarece d este impar, el poate fi doar 1, de unde rezultă concluzia 4,5p

Problema 2. În jurul punctului O se consideră unghiurile AOB , BOC , COD și DOA astfel $6 \cdot m(\angle COD) = 7 \cdot m(\angle BOC)$, $10 \cdot m(\angle AOB) = 7 \cdot m(\angle AOD)$ și unghiul format de bisectoarele unghiurilor AOD și BOC este alungit.

- a) Demonstrați că unghiurile AOB și COD sunt congruente.
b) Aflați măsurile unghiurilor AOB , BOC , COD și DOA . **(22,5p)**

Barem de corectare.

- a) Fie OM , respectiv ON bisectoarele unghiurilor AOD , respectiv BOC , deci

- $m(\angle AOM) = m(\angle MOD)$ și $m(\angle BON) = m(\angle NOC)$ 3p
 $m(\angle MON) = 180^\circ$ 2p
 $m(\angle AOB) + m(\angle AOM) + m(\angle BON) = m(\angle COD) + m(\angle MOD) + m(\angle NOC)$ 3p
Deci $m(\angle AOB) = m(\angle COD)$ 2p
b) $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) + m(\angle COD) + m(\angle AOD) = 360^\circ$ 2p

- Folosind relațiile din ipoteză obținem $m(\angle AOB) = m(\angle COD) = 84^\circ$ 6p
 $m(\angle BOC) = 72^\circ$ și $m(\angle AOD) = 120^\circ$ 4,5p

Problema 3. Fie mulțimea $M = \{1, 2, 3, \dots, 24\}$. Demonstrați că, oricum am alege 17 numere distincte din mulțimea M există printre ele două numere al căror produs este un pătrat perfect. **(22,5p)**

Barem de corectare.

Formăm o partiție a mulțimii M astfel

$A = \{1, 4, 9, 16\}$, $B = \{2, 8, 18\}$, $C = \{3, 12\}$, $D = \{5, 20\}$, $E = \{6, 24\}$,

$F = \{7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23\}$ 6p

Oricum alegem două elemente diferite din una din multimile A, B, C, D, E produsul lor este pătrat perfect 6p

Dacă alegem toate elementele din F și câte un element din celelalte mulțimi, avem 16 elemente

..... 6p

Rezultă că dacă alegem 17 elemente, sigur una din multimile A, B, C, D, E va conține cel puțin două dintre ele 4,5p

Problema 4. Pe segmentul AB se consideră punctele $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$, în această ordine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $AM_1=x$, $M_1M_2=2AM_1$, $M_2M_3=2AM_2$, $M_3M_4=2AM_3$, $\dots$, $M_{n-1}M_n=2AM_{n-1}$, $M_nB=2AM_n$.

- a) Dacă $x=2$ cm calculați lungimea segmentului M_3M_5 .
b) Aflați numărul natural n știind că $AB=2187x$. **(22,5p)**

Barem de corectare.

- a) $AM_1=2$ cm, $M_1M_2=4$ cm, $M_2M_3=12$ cm, $M_3M_4=36$ cm, $M_4M_5=108$ cm **4p**
 $M_3M_5=144$ cm **2p**

- b) $AM_1=x$, $M_1M_2=2x$, $M_2M_3=2 \cdot 3x$, $M_3M_4=2 \cdot 3^2 \cdot x$, ..., $M_{n-1}M_n=2 \cdot 3^{n-2} \cdot x$ **5p**

$$AM_n = x + 2x + 2 \cdot 3x + 2 \cdot 3^2 \cdot x + \dots + 2 \cdot 3^{n-2} \cdot x \text{ } \mathbf{4p}$$

$$AM_n = x \cdot 3^{n-1} \text{ } \mathbf{3p}$$

$$AB = AM_n + M_nB = 3 AM_n = x \cdot 3^n \text{ } \mathbf{2p}$$

$$n=7 \text{ } \mathbf{2,5p}$$

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2026

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII - a

Problema 1.

a) Calculați: $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{6})^2} + \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{7})^2} + \dots + \sqrt{(\sqrt{2024} - \sqrt{2025})^2}$.

b) Aflați numerele raționale a și b pentru care $3a - b\sqrt{3} = 2 - b + \sqrt{3}$.

Barem de corectare.

a) $|2 - \sqrt{5}| + |\sqrt{5} - \sqrt{6}| + |\sqrt{6} - \sqrt{7}| + \dots + |\sqrt{2024} - \sqrt{2025}| =$ **5p**

$\sqrt{5} - 2 + \sqrt{6} - \sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{6} + \dots + \sqrt{2025} - \sqrt{2024}$ **5p**

$45 - 2 = 43$ **5p**

b) $3a + b - 2 = \sqrt{3}(b + 1)$ **2p**

$3a + b - 2, b + 1 \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ **2p**

$\Rightarrow b + 1 = 0 \Rightarrow 3a + b - 2 = 0$ **2p**

$\Rightarrow b = -1$ și $a = 1$ **1,5p**

Problema 2.

Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, iar D, E și F punctele de tangență ale acestui cerc cu laturile BC, AC respectiv AB. Știind că $m(\angle A) = 60^\circ$ și $AE = 8$ cm, aflați:

a) EF;

b) PQ, unde $BI \cap DF = \{P\}$ și $CI \cap DE = \{Q\}$.**Barem de corectare.**a) $AE = AF$ (tangente dintr-un punct la același cerc) **10p**triunghiul AEF echilateral $\Rightarrow EF = 8$ cm **5p**b) CI este mediatoarea segmentului DE, deci Q este mijlocul lui DE **3p**analog BI mediatoarea segmentului DF, deci P este mijlocul lui DE **3p**PQ linie mijlocie în DEF $\Rightarrow PQ = 4$ cm **1,5p****Problema 3.**

Antonia își propune să completeze celulele unui tabel care are 2025 de linii și 2026 de coloane cu numere naturale astfel încât fiecare linie și fiecare coloană să conțină cel puțin un număr nenul. Ea trebuie să respecte următoarea regulă: pentru fiecare celulă (căsuță) care conține un număr nenul, suma numerelor de pe linia sa să fie egală cu suma numerelor de pe coloana sa. Stabiliți dacă reușește sau nu Antonia să completeze tabelul.

Barem de corectare.

Dacă suma numerelor de pe prima linie este s și pe prima linie sunt m elemente nenule, atunci fiecare dintre coloanele care conțin cele m elemente nenule are suma elementelor s **6p**

Considerăm că cele m coloane au elemente nenule la intersecția cu n linii **6p**

rezultă că suma elementelor de pe fiecare dintre cele n linii este s **2p**

restul elementelor și de pe cele m coloane și de pe cele n linii sunt 0 **2p**

calculând suma elementelor de la intersecțiile celor n linii și m coloane se obține pe de o parte ns , iar pe de altă parte ms , deci $m=n$ **2p**

obținem că numărul liniilor care au suma elementelor a este egal cu numărul coloanelor care au suma elementelor a , indiferent câte valori diferite (maxim 2025) ar avea a **2p**

Tabelul inițial are 2025 de linii și 2026 de coloane, deci Antonia nu-l poate completa așa încât să respecte condițiile din enunț **2,5p**

Problema 4.

Se consideră pătratul $ABCD$, P mijlocul laturii AB și Q mijlocul laturii BC .

a) Arătați că dreptele AQ și DP sunt perpendiculare;

b) Arătați că unghiurile ADP și PDS sunt congruente, unde S este mijlocul segmentului BQ .

Barem de corectare.

a) triunghiurile ABQ și DAP sunt congruente **10p**

unghiurile BAQ și ADP sunt congruente **3p**

unghiurile ADP și DAQ sunt complementare **3p**

dreptele AQ și DP sunt perpendiculare **1p**

b) PS linie mijlocie $\Rightarrow PS \parallel AQ$ **2p**

fie $PS \cap AD = \{T\} \Rightarrow PT=PS$ **2p**

triunghiul DST isoscel $\Rightarrow (DP$ bisectoarea unghiului ADS **1,5p**

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2026

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII - a

Problema 1. (22,5 p)

Fie numerele $a_n = \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{7}{2 \cdot 3} + \frac{13}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{n^2 - n + 1}{(n-1)n}$; $n \in \mathbb{N}$; $n > 1$. Notăm cu $[a_n]$ partea întreagă a numărului a_n și cu $\{a_n\}$ partea fracționară a numărului a_n .

a) (7,5p) Să se calculeze $[a_2]$ și $\{a_3\}$.

b) (5p) Să se demonstreze că $\frac{n^2 - n + 1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$ pentru $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

c) (10p) Să se determine $[a_{2026}]$ și $\{a_{2026}\}$.

Barem de corectare.

a) $a_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow [a_2] = 1$ 4p

$a_3 = \frac{8}{3} \Rightarrow [a_3] = 2$; $\{a_3\} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$ 3,5p

b) Verificarea identității5p

c) $a_{2026} = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + 1 + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + 1 + \frac{1}{2025 \cdot 2026} = 2025 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2025} - \frac{1}{2026}\right) = 2025 + \frac{2025}{2026}$ 6p

Astfel obținem $[a_{2026}] = 2025$ 2p

$\{a_{2026}\} = \frac{2025}{2026}$ 2p

Problema 2. (22,5 p)

În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ lungimile diagonalelor $AC = m$, $AB' = n$, $AD' = p$ verifică relația:

$$\sqrt{m^2 - 4\sqrt{3}m + 13} + \sqrt{n^2 - 4\sqrt{5}n + 29} + \sqrt{p^2 - 8p + 20} \leq 6.$$

a) (11,5p) Calculați perimetrul triunghiului $B'CD'$.

b) (11p) Aflați distanța de la punctul A' la dreapta $B'O$, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

Barem de corectare.

a) Relația se poate scrie sub forma

$$\sqrt{(m - 2\sqrt{3})^2 + 1} + \sqrt{(n - 2\sqrt{5})^2 + 9} + \sqrt{(p - 4)^2 + 4} \leq 6. \dots\dots\dots 2,5p$$

Dar $\sqrt{(m - 2\sqrt{3})^2 + 1} \geq 1$, $\sqrt{(n - 2\sqrt{5})^2 + 9} \geq 3$, $\sqrt{(p - 4)^2 + 4} \geq 2$ de unde rezultă că

$$\sqrt{(m - 2\sqrt{3})^2 + 1} + \sqrt{(n - 2\sqrt{5})^2 + 9} + \sqrt{(p - 4)^2 + 4} \geq 6 \dots\dots\dots 2p$$

Avem egalitate pentru $m = 2\sqrt{3}$, $n = 2\sqrt{5}$ și $p = 4$ 4p

Perimetrul triunghiului $B'CD'$ este $2(2 + \sqrt{3} + \sqrt{5})$ 3p

- b) Dacă notăm $AB = a, AD = b, AA' = c$ din teorema lui Pitagora obținem $a^2 + b^2 = m^2$,
 $a^2 + c^2 = n^2$ și $c^2 + b^2 = p^2$
 $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 24$, de unde obținem $a = 2\sqrt{2}, b = 2, c = 2\sqrt{3}$ 3p
 Fie $A'N \perp B'D', N \in B'D'$. Cum $BB' \perp (A'B'C') \Rightarrow A'N \perp (BB'D')$ 2p
 Ducem $NM \perp B'O, M \in B'O$ de unde, conform teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că
 $A'M \perp B'O$ și astfel avem $d(A', B'O) = A'M$ 2p
 În $\Delta A'B'C'$ avem $A'N = \frac{A'B' \cdot A'D'}{B'D'} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ și $A'B'^2 = B'N \cdot B'D' \Rightarrow B'N = \frac{4\sqrt{3}}{3}$
 În $\Delta B'BO$ avem $B'O = \sqrt{15}$ 2p
 Din $\Delta NMB' \sim \Delta B'BO \Rightarrow MN = \frac{8\sqrt{15}}{15}$
 În triunghiul dreptunghic $A'NM$ avem $A'M = \frac{2\sqrt{390}}{15}$ 2p

Problema 3. (22,5 p)

Rezolvați ecuația $x^2(y+1) + y^2(x+1) = 1$ în mulțimea numerelor întregi. (*Gazeta Matematică*)

Barem de corectare.

- Ecuația este simetrică în x și y . Notăm $x + y = s$ și $x \cdot y = p$, cu $s, p \in \mathbb{Z}$ 2p
 Ecuația se poate scrie sub forma $xy(x+y) + (x+y)^2 - 2xy = 1$ 2p
 Obținem astfel $sp + s^2 - 2p = 1$ 3p
 $\Leftrightarrow p(s-2) + s^2 - 4 = -3 \Leftrightarrow (s-2)(p+s+2) = -3$ 3,5p
 Astfel avem
 Cazul I:
 $s-2 = -3$ și $p+s+2 = 1 \Rightarrow s = -1, p = 0$ de unde avem soluțiile
 $(x, y) \in \{(-1, 0); (0, -1)\}$ 3p
 Cazul II:
 $s-2 = 3$ și $p+s+2 = -1 \Rightarrow s = 5, p = -8$ de unde rezultă ecuația $x(5-x) = -8$. Cum
 numerele x și $5-x$ sunt de parități diferite rezultă că $x = \pm 1$ sau $5-x = \pm 1$, care nu convin.
 Așadar, în acest caz, ecuația nu are soluții întregi3p
 Cazul III:
 $s-2 = -1$ și $p+s+2 = 3 \Rightarrow s = 1, p = 0$ de unde avem soluțiile
 $(x, y) \in \{(0, 1); (1, 0)\}$ 3p
 Cazul IV:
 $s-2 = 1$ și $p+s+2 = -3 \Rightarrow s = 3, p = -8$ de unde rezultă ecuația $x(3-x) = -8$ Cum
 numerele x și $3-x$ sunt de parități diferite rezultă că $x = \pm 1$ sau $3-x = \pm 1$ care nu convin.
 Rezultă că ecuația nu are soluții întregi în acest caz3p

Problema 4. (22,5 p)

a) (11,5p) Fie $ABCD$ un tetraedru cu muchiile opuse congruente și M un punct al muchiei (AB) . Notăm cu P acel punct al muchiei (AD) pentru care suma $MP + PC$ să fie minimă, iar cu Q acel punct al muchiei (BD) pentru care suma $MQ + QC$ este minimă. Să se arate că:

$$\frac{MP}{PC} + \frac{MQ}{QC} = 1.$$

b) (11p) Fie $ABCD$ un tetraedru astfel încât $AB \perp CD$ și $AD \perp BC$. Demonstrați că $AC \perp BD$.

Barem de corectare.

a) Considerăm desfășurarea tetraedrului:2,5p

Notăm $AB = DC = z$

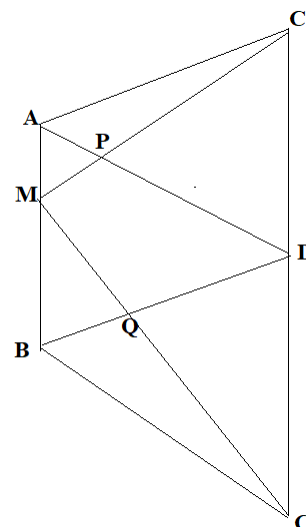
Din cazul $L. L. L.$ avem $\triangle ADC \equiv \triangle DAB \equiv \triangle BCD$ de unde rezultă

$$\sphericalangle CDA \equiv \sphericalangle BAD \Rightarrow AB \parallel CD$$

$$\text{și } \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle BDC \Rightarrow AB \parallel CD \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Astfel } \triangle MAP \sim \triangle CDP \Rightarrow \frac{MP}{PC} = \frac{AM}{z} \dots\dots\dots 2p$$

$$\triangle MBQ \sim \triangle CDQ \Rightarrow \frac{MQ}{QC} = \frac{BM}{z}. \text{ Atunci obținem } \frac{MP}{PC} + \frac{MQ}{QC} = 1 \dots\dots\dots 4p$$



b) Fie $AO \perp (BCD)$, $O \in (BCD)$, $CD \subset (BCD) \Rightarrow AO \perp CD$ 1p

Dar cum $AB \perp CD$ obținem $CD \perp (ABO) \Rightarrow CD \perp BO$ 3p

Analog $BC \perp DO$ 3p

Astfel obținem că O este ortocentrul triunghiului BCD , deci $CO \perp BD$ 2p

Dar $BD \perp AO \Rightarrow BD \perp (AOC) \Rightarrow BD \perp AC$ 2p