OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2025

Clasa a V – a

Problema 1. Fie numerele $A = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^{2024}$ şi $B = 7 \cdot 7^3 \cdot 7^5 \cdot ... \cdot 7^{89}$.

a) Determinaţi ultima cifră a numărului B;

b) Comparaţi numerele $6A + 1$ şi B.

Problema 2. Pe o masă sunt 200 de bile. Alex şi Bob ridică, pe rând, între 1 şi 6 bile de pe masă. Câştigătorul jocului este cel care ridică ultima bilă. Ştiind că Alex este cel care începe jocul, stabiliţi o strategie de câştig pentru acest jucător.

Problema 3. Fie numărul $N = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2024 + 2025$.

a) Aflaţi suma ultimelor 224 de cifre ale numărului N;

b) Care este restul împărţirii numărului N la 10^{225}.

Problema 4. Determinaţi numerele naturale a, b şi c, pentru care $a^2 + b^2 = 4^c + 207$.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2025

Clasa a VI – a

Problema 1.

a) Să se demonstreze că numărul $a = 3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^{2025}$ este divizibil cu 4;

b) Să se arate că dacă $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^m = 3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^n$, atunci $m = n = 0$.

Problema 2.

a) Să se afle numărul $\overline{abc}$, ştiind că $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ şi $\overline{bc}$ sunt direct proporţionale cu $27, 28$ şi 23.

b) Există numere naturale de forma $\overline{abc}$, astfel încât $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, şi $\overline{bc}$ să fie direct proporţionale cu n, $n+1$ şi $n+2$, pentru un număr natural nenul n? Justificaţi răspunsul.

Problema 3. Pe tablă este desenat un unghi obtuz $\widehat{XOY}$. În interiorul unghiului, Andrei desenează n semidrepte $OA_1, OA_2, ..., OA_n$, astfel încât

$$\widehat{XOA_1} = \widehat{A_1OA_2} = ... = \widehat{A_{n-1}OA_n} = \widehat{A_nOY} = 3^\circ,$$

iar Bianca desenează m semidrepte $OB_1, OB_2, ..., OB_m$, astfel încât

$$\widehat{XOB_1} = \widehat{B_1OB_2} = ... = \widehat{B_{m-1}OB_m} = \widehat{B_mOY} = 5^\circ.$$

a) Să se afle măsura unghiului $\widehat{A_5OB_7}$;

b) Să se afle cea mai mică valoare posibilă a măsurii unghiului $\widehat{XOY}$;

c) Să se afle măsura unghiului $\widehat{XOY}$ ştiind că exact 8 dintre semidreptele din interiorul unghiului $\widehat{XOY}$ sunt desenate de ambii copii.

Problema 4. Pentru fiecare număr natural n, se consideră mulţimea $A_n = \{d \in \mathbb{N} \mid 10^n \vdots d\}$.

a) Câte elemente are mulţimea A_{10}? Câte dintre acestea sunt pătrate perfecte?

b) Să se demonstreze că nu există două mulţimi B şi C, pentru care să fie îndeplinite simultan condiţiile: $B \cap C = \varnothing$, $B \cup C = A_{2024}$ şi suma elementelor mulţimii B este egală cu suma elementelor mulţimii C.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2025

Clasa a VII – a

Problema 1. Se consideră mulţimea:

$$A=\left\{\frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{\sqrt{1\cdot 5}},\frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{\sqrt{5\cdot 9}},\frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{\sqrt{9\cdot 13}},\ldots,\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2021}}{\sqrt{2021\cdot 2025}}\right\}.$$

$a)$ Să se calculeze suma elementelor lui A;

$b)$ Arătaţi că suma elementelor oricărei submulţimi nevide a lui A, **nu** este un număr natural.

Problema 2.

$a)$ Fie cifrele nenule a, b şi c, astfel încât $\sqrt{\overline{0,0\,(a)}+\overline{0,0\,(b)}+\overline{0,0\,(c)}}\in\mathbb{Q}$. Arătaţi că $\sqrt{(a+b+c)^{2025}+2026}\notin\mathbb{Q}$;

$b)$ Determinaţi numerele naturale x şi y, pentru care $\sqrt{x+24}=\sqrt{3^y+9}+1$.

Problema 3. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB>AD$ şi E un punct în plan astfel încât $BDEC$ să fie trapez isoscel. Să se arate că:

$a)$ $AE\perp EC$;

$b)$ $\sphericalangle DAE\equiv\sphericalangle CAB$.

Problema 4. Fie $ABCD$ un pătrat. Notăm cu M simetricul lui B faţă de C. Pe semidreapta $[CA$ se consideră punctul N astfel încât $\sphericalangle NMB=30^\circ$. Dreapta MN intersectează AD şi BD în punctele P respectiv Q.

$a)$ Să se calculeze măsura unghiului BQP;

$b)$ Să se arate că $BP\equiv BQ$.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2025

Clasa a VIII – a

Problema 1. Determinaţi tripletele (x, y, z) de numere întregi ştiind că

$$x^2 + 4y^2 - 4x + 12y + |4z - 5| + 11 = 0.$$

Problema 2. Fie $E(n) = \sqrt{4n^2 + n}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

a) Determinaţi $[E(n)]$;

b) Arătaţi că pentru $n \geqslant 2$, primele două zecimale ale numărului $E(n)$ sunt 2 şi 4.

Notă. $[x]$ *reprezintă partea întreagă a numărului* x.

Problema 3. Fie $x, y, z > 0$. Să se arate că:

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geqslant \dfrac{2}{\sqrt{xy}}$;   *b*) $(x + y + z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) \geq 9$;

c) dacă $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 2025$, atunci

$$\frac{x(2x+1) + y(2y+1)}{xy} + \frac{y(2y+1) + z(2z+1)}{yz} + \frac{z(2z+1) + x(2x+1)}{zx} \geqslant \frac{2702}{225}.$$

Problema 4. Fie M şi N mijloacele muchiilor $B'C'$, respectiv $C'D'$ ale cubului $ABCDA'B'C'D'$.

a) Arătaţi că $MN \parallel (A'BD)$ şi determinaţi tangenta unghiului dintre dreapta CN şi planul $(A'AC)$;

b) Determinaţi cosinusul unghiului dintre dreptele AM şi BN.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2025

Clasa a IX – a

Problema 1. În planul triunghiul ABC se consideră punctele M, N şi P astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{n+4}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{n}{n+4}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{n+4}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{n+1}{n+4}\cdot\overrightarrow{BA}$, respectiv $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{n+4}\cdot\overrightarrow{CA}+\frac{n+2}{n+4}\cdot\overrightarrow{CB}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că există un număr $\alpha > 0$, astfel încât $\overrightarrow{MB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CM}$;

b) Să se determine valoarea lui $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât dreptele AM, BN şi CP să fie concurente.

Problema 2. Fie a, b şi c trei numere reale care verifică relaţiile $a + b + c = 12$, $a^2 + b^2 + c^2 = 56$ şi $abc = 48$. Să se calculeze $ab + ac + bc$ şi valoarea expresiei

$$E = \frac{1}{ab+c-11}+\frac{1}{bc+a-11}+\frac{1}{ca+b-11}.$$

Problema 3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

a) dacă m şi n sunt două numere naturale de aceeaşi paritate, atunci

$$\frac{a^m+b^m}{2}\cdot\frac{a^n+b^n}{2}\le\frac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2};$$

b) $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\le\frac{a^6+b^6}{2}$.

Problema 4. Fie numerele $m, n \in \mathbb{N}^*$, cu $(m, n) = 1$.

a) Să se arate că mulţimea $\left\{\left\{\frac{mk}{n}\right\}\ \middle|\ k = 1, 2, ..., n\right\}$ are n elemente;

b) Să se calculeze $S = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{mk}{n}\right]$.

Notă. $[x]$ *şi* $\{x\}$ *reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului* x.

---

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA FILIALA BIHOR
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2025

Clasa a X – a

Problema 1. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}$ (n radicali). Să se arate că, pentru orice $n \geq 1$, au loc relaţiile:

a) $x_n < 2$; *b*) $4(2 - x_{n+1}) > 2 - x_n$.

Problema 2. Să se detemine funcţiile injective $f, g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, care satisfac relaţiile:

a) $f(x \cdot f(y)) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$;

b) $g(x \cdot g(y)) = \dfrac{1}{g(g(x) \cdot y)}$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$.

Problema 3. Să se calculeze $|z_1 + z_2 + z_3|$, ştiind că z_1, z_2 şi z_3 sunt trei numere complexe cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ şi $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Să se găsească trei numere complexe z_1, z_2 şi z_3 care verifică aceste relaţii.

Problema 4. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, 1)$ sau $a, b, c \in (1, +\infty)$, atunci

$$\log_{a^2b} a + \log_{b^2c} b + \log_{c^2a} c \leq 1.$$

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2025

Clasa a XI – a

Problema 1. Se consideră matricea $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 4} \in M_4(\mathbb{R})$, unde

$$a_{ij} = \begin{cases} 7, & \text{dacă } i = j \\ 5, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}, \quad \text{pentru } i, j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Să se calculeze A^n, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 2. Fie $n \ge 2$ un număr natural şi mulţimea

$$M = \{(A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \mid A \neq B \text{ şi } AB = A + B\}.$$

a) Să se arate că mulţimea M are o infinitate de elemente;

b) Să se arate că dacă $(A, B) \in M$, atunci $AB = BA$.

Problema 3. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{b^k}$, unde $a, b \in (0, +\infty)$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{x}}}{x}$.

Problema 4. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $x_0 = \sqrt{2}$ şi $x_{n+1} = \sqrt{2}^{\,x_n}$, pentru $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi să i se calculeze limita.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2025

Clasa a XII – a

Problema 1. Fie $M(x) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2x+3 & -x & -x \\ -x & 2x+3 & -x \\ -x & -x & 2x+3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, unde $x \in \mathbb{R}$ şi mulţimea $G = \{M(x) \mid x \in \mathbb{R},\ x \neq -1\}$.

a) Să se arate că G are o structură de grup abelian în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor;

b) Să se calculeze P^n pentru $n \in \mathbb{N}^*$, unde $P = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Problema 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi mulţimea $Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx,\ \text{pentru fiecare } g \in G\}$. Să se arate că:

a) $Z(G)$ este un subgrup al lui G;

b) dacă $x^2 = e$, pentru orice element $x \in G \setminus Z(G)$, atunci grupul G este comutativ.
(cu e s-a notat elementul neutru al grupului G)

Problema 3. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(4-\sin^2 x)(1+2^x)} dx$; *b*) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x^6+4x^3+2025x^2+4} dx,\ \ x \in (0, +\infty)$.

Problema 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că

$$f(x) = 2\left(1+x^2\right) \cdot \left(1 + \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt\right), \text{ pentru fiecare } x \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că:

a) funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}$;

b) există o singură funcţie f care satisface condiţia din enunţ. Să se determine această funcţie.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.