OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2025

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V – a

Problema 1. Fie numerele $A = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^{2024}$ şi $B = 7 \cdot 7^3 \cdot 7^5 \cdot ... \cdot 7^{89}$.

a) Determinaţi ultima cifră a numărului B;

b) Comparaţi numerele $6A + 1$ şi B.

Barem de corectare. *a*) Deoarece $B = 7^{1+3+5+\cdots+89} = 7^{2025}$, ... (**2p**)
iar $2025 = 4 \cdot 506 + 1$, rezultă că $u\left(7^{2025}\right) = u(7) = 7$; .... (**2p**)

b) Din $7A = 7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^{2024} + 7^{2025}$ se obţine $6A = 7^{2025} - 1$, ... (**2p**)
adică $6A + 1 = B$ .... (**1p**)

Problema 2. Pe o masă sunt 200 de bile. Alex şi Bob ridică, pe rând, între 1 şi 6 bile de pe masă. Câştigătorul jocului este cel care ridică ultima bilă. Ştiind că Alex este cel care începe jocul, stabiliţi o strategie de câştig pentru acest jucător.

Barem de corectare. Restul împărţirii lui 200 la 7 este 4 .... (**1p**)
Dacă Alex ridică la începerea jocului 4 bile, iar apoi, de fiecare dată un număr de bile egal cu $7-x$, unde x este numărul de bile ridicate la pasul anterior de către Bob, atunci, înainte de ultima ridicare a lui Bob vor rămâne exact 7 bile, ceea ce îl face pe Alex câştigător. .... (**6p**)

Problema 3. Fie numărul $N = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2024 + 2025$.

a) Aflaţi suma ultimelor 224 de cifre ale numărului N;

b) Care este restul împărţirii numărului N la 10^{225}.

Barem de corectare. *a*) Deoarece numărul $p = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2024$ conţine factorii $\underbrace{10, 20, \ldots, 2020}_{202 \text{ numere}}$, $\underbrace{100, 200, ...2000}_{20 \text{ numere}}$, respectiv 1000 şi 2000, rezultă că ultimele 224 cifre ale lui p sunt toate 0 .. (**2p**)
şi astfel, suma ultimelor 224 de cifre ale lui $N = p + 2025$ este 9 .... (**2p**)

b) De exemplu, din produlsul $2 \cdot 50$, vom mai avea încă cel puţin o cifră de 0, adică cel puţin ultimele 225 cifre ale lui p sunt toate 0. .... (**1p**)
Aşadar, $N = 10^{225} \cdot n + 2025$ de unde se obţine că restul împărţirii lui N la 10^{225} este 2025 (**2p**)

Problema 4. Determinaţi numerele naturale a, b şi c, pentru care $a^2 + b^2 = 4^c + 207$.

Barem de corectare. Deoarece restul împărţirii unui pătrat perfect la 4 poate fi 0 sau 1, iar $207 = 4 \cdot 51 + 3$, rezultă că $c = 0$ .... (**3p**)

Aşadar, problema se reduce la găsirea numerelor a şi b pentru care $a^2+b^2 = 208$. Cum $208 = 4^2 \cdot 13$, obţinem succesiv $\begin{cases} a^2 = 4a_1^2 \\ b^2 = 4b_1^2 \end{cases} \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 = 4 \cdot 13$, de unde $\begin{cases} a_1^2 = 4a_2^2 \\ b_1^2 = 4b_2^2 \end{cases} \Rightarrow a_2^2 + b_2^2 = 13$......... (**2p**)

Astfel, obţinem că $(a_2, b_2) = (2, 3)$ sau $(a_2, b_2) = (3, 2)$, de unde rezultă că $(a, b, c) = (8, 12, 0)$ sau $(a, b, c) = (12, 8, 0)$ .... (**2p**)

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2025

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI – a

Problema 1.

$a)$ Să se demonstreze că numărul $a = 3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^{2025}$ este divizibil cu 4;

$b)$ Să se arate că dacă $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^m = 3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^n$, atunci $m = n = 0$.

Barem de corectare. $a)$ Din $a = (3^0 + 3^1) + (3^2 + 3^3) + ... + (3^{2024} + 3^{2025}) = 4(3^0 + 3^2 + 3^4 + ... + 3^{2024})$, rezultă că $a \vdots 4$ .... **(2p)**

$b)$ Deoarece $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^m$ este un număr impar, rezultă că n este par .... **(2p)**

Dacă n este par, atunci restul împărţirii numărului $3^0 + 3^1 + ... + 3^n = 1 + 4\left(3^1 + 3^3 + ... + 3^{n-1}\right)$ la 4 este 1 .... **(1p)**

Dar, cum pentru $m \geq 2$, restul împărţirii numărului $2^0 + 2^1 + ... + 2^m = 3 + 4\left(1 + 2^1 + ... + 2^{m-2}\right)$ la 4 este 3, rezultă că $m = 0$ sau $m = 1$ .... **(1p)**

În final, se obţine $m = n = 0$ .... **(1p)**

Problema 2.

$a)$ Să se afle numărul $\overline{abc}$, ştiind că $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ şi $\overline{bc}$ sunt direct proporţionale cu $27, 28$ şi 23.

$b)$ Există numere naturale de forma $\overline{abc}$, astfel încât $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, şi $\overline{bc}$ să fie direct proporţionale cu n, $n+1$ şi $n+2$, pentru un număr natural nenul n? Justificaţi răspunsul.

Barem de corectare. $a)$ Din ipoteză, rezultă că există un număr raţional $k > 0$, astfel încât $\dfrac{\overline{ab}}{27} = \dfrac{\overline{ac}}{28} = \dfrac{\overline{bc}}{23} = k$, de unde avem că $\overline{ab} = 27k$, $\overline{ac} = 28k$ şi $\overline{bc} = 23k$ .... **(2p)**

Din $23 \cdot \overline{ab} = 27 \cdot \overline{bc}$, deoarece $(23, 27) = 1$ deducem că $\overline{bc} \vdots 23$, adică k este natural.......... **(1p)**

Astfel din $\overline{ab} = 27k < 99$, se obţine că valorile posibile pentru k sunt $1, 2$ şi 3. Prin verificare, se obţine $k = 2$ şi $\overline{abc} = 546$.......... **(1p)**

$b)$ Dacă există numerele naturale $\overline{abc}$ şi n astfel încât $\dfrac{\overline{ab}}{n} = \dfrac{\overline{ac}}{n+1} = \dfrac{\overline{bc}}{n+2}$, atunci $\overline{ab} < \overline{ac} < \overline{bc}$, de unde rezultă că $a < b < c$ .... **(1p)**

Deoarece $\dfrac{\overline{ab}}{n} = \dfrac{\overline{ac}}{n+1} = \dfrac{\overline{bc}}{n+2} = \dfrac{\overline{ac} - \overline{ab}}{n+1-n} = \dfrac{\overline{bc} - \overline{ac}}{n+2-n-1}$, obţinem că $c - b = 10\,(b - a) \geq 10$, ceea ce este imposibil. Aşadar, răspunsul este NU.......... **(2p)**

Problema 3. Pe tablă este desenat un unghi obtuz $\widehat{XOY}$. În interiorul unghiului, Andrei desenează n semidrepte $OA_1, OA_2, ..., OA_n$, astfel încât

$$\widehat{XOA_1} = \widehat{A_1OA_2} = ... = \widehat{A_{n-1}OA_n} = \widehat{A_nOY} = 3^\circ,$$

iar Bianca desenează m semidrepte $OB_1, OB_2, ..., OB_m$, astfel încât

$$\widehat{XOB_1} = \widehat{B_1OB_2} = ... = \widehat{B_{m-1}OB_m} = \widehat{B_mOY} = 5°.$$

a) Să se afle măsura unghiului $\widehat{A_5OB_7}$;

b) Să se afle cea mai mică valoare posibilă a măsurii unghiului $\widehat{XOY}$;

c) Să se afle măsura unghiului $\widehat{XOY}$ ştiind că exact 8 dintre semidreptele din interiorul unghiului $\widehat{XOY}$ sunt desenate de ambii copii.

Barem de corectare.
a) Avem $\widehat{A_5OB_7} = \widehat{XOB_7} - \widehat{XOA_5} = 35° - 15° = 20°$ .... **(2p)**

b) Dacă $\widehat{XOY} = p°$, atunci din $p \vdots [3, 5]$ şi $p > 90$, rezultă că cea mai mică valoare posibilă a măsurii unghiului $\widehat{XOY}$ este de $105°$ .... **(2p)**

c) Presupunem că $\widehat{XOY} = k \cdot 15°$. Două semidrepte OA_i şi OB_j coincid (sunt desenate de ambii copii) dacă şi numai dacă $\widehat{XOA_i} = \widehat{XOB_j} = x \cdot 15°$, unde $x \in \{1, 2, ..., k-1\}$, adică numărul de semidrepte comune din interiorul unghiului $\widehat{XOY}$ este $k - 1$. Aşadar $k = 9$, de unde obţinem că $\widehat{XOY} = 135°$ .... **(3p)**

Problema 4. Pentru fiecare număr natural n, se consideră mulţimea $A_n = \{d \in \mathbb{N} \mid 10^n \vdots d\}$.

a) Câte elemente are mulţimea A_{10}? Câte dintre acestea sunt pătrate perfecte?

b) Să se demonstreze că nu există două mulţimi B şi C, pentru care să fie îndeplinite simultan condiţiile: $B \cap C = \varnothing$, $B \cup C = A_{2024}$ şi suma elementelor mulţimii B este egală cu suma elementelor mulţimii C.

Barem de corectare. *a*) Deoarece numărul divizorilor lui $10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10}$ este $(10+1) \cdot (10+1) = 121$, rezultă că mulţimea A_{10} are 121 elemente... **(1p)**
Un divizor al lui 10^{10} are forma $2^a \cdot 5^b$ cu $a, b \leq 10$. Acesta este pătrat perfect dacă a şi b sunt numere pare, adică $a, b \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Aşadar, numărul de pătrate perfecte din A_{10} este $6 \cdot 6 = 36$. .... **(2p)**

Notăm cu $S(X)$ suma elementelor unei mulţimi finite de numere, X.

b) Dacă ar exista mulţimile B şi C care să verifice condiţiile din enunţ, atunci am obţine că $S(A_{2024}) = S(B) + S(C) = 2 \cdot S(B)$ este un număr par. .... **(2p)**
Dar, cum în mulţimea A_{2024} avem 2025 termeni impari (divizorii numărului 5^{2024}), $S(A_{2024})$ este un număr impar. Aşadar, nu există două mulţimi B şi C care să verifice condiţiile din enunţ **(2p)**

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2025

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII – a

Problema 1. Se consideră mulţimea:

$$A=\left\{\frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{\sqrt{1\cdot 5}},\frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{\sqrt{5\cdot 9}},\frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{\sqrt{9\cdot 13}},...,\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2021}}{\sqrt{2021\cdot 2025}}\right\}$$

a) Să se calculeze suma elementelor lui A;

b) Arătaţi că suma elementelor oricărei submulţimi nevide a lui A **nu** este un număr natural.

Barem de corectare. *a*) Suma elementelor lui A este

$$S=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{\sqrt{1\cdot 5}}+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{\sqrt{5\cdot 9}}+...+\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2021}}{\sqrt{2021\cdot 2025}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{9}}+...+\frac{1}{\sqrt{2021}}-\frac{1}{\sqrt{2025}}=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2025}}=\frac{44}{45}$$ .... **(4p)**

b) Fie B o submulţime nevidă a lui A. Cum toate elementele lui A sunt pozitive şi $S<1$, rezultă că suma T a elementelor lui B verifică $0<T<1$, deci T nu este un număr natural......... **(3p)**

Problema 2.

a) Fie cifrele nenule a,b şi c, astfel încât $\sqrt{\overline{0,0\,(a)}+\overline{0,0\,(b)}+\overline{0,0\,(c)}}\in\mathbb{Q}$. Arătaţi că $\sqrt{(a+b+c)^{2025}+2026}\notin\mathbb{Q}$.

b) Determinaţi numerele naturale x şi y, pentru care $\sqrt{x+24}=\sqrt{3^y+9}+1$.

Barem de corectare. *a*) Deoarece $\sqrt{\overline{0,0\,(a)}+\overline{0,0\,(b)}+\overline{0,0\,(c)}}=\frac{\sqrt{10\,(a+b+c)}}{30}$, obţinem că $\sqrt{10\,(a+b+c)}\in\mathbb{Q}$, de unde rezultă că $a+b+c=10$. Cum $(a+b+c)^{2025}+2026=10^{2025}+2026=M_3+2$, acesta nu poate fi pătrat perfect, de unde rezultă că $\sqrt{(a+b+c)^{2025}+2026}\notin\mathbb{Q}$. . **(4p)**

b) Cum $x+24, 3^y+9\in\mathbb{N}$ şi $\sqrt{x+24}-\sqrt{3^y+9}\in\mathbb{Q}^*$, rezultă că $\sqrt{x+24},\sqrt{3^y+9}\in\mathbb{Q}$ şi că numerele $x+24$ şi 3^y+9 sunt pătrate perfecte. Atunci există un număr natural $a\geq 3$, astfel încât $3^y+9=a^2\Leftrightarrow(a-3)(a+3)=3^y$, de unde rezultă că există numerele $m,n\in\mathbb{N}$, astfel încât $a-3=3^m$, $a+3=3^n$. Cum $m<n$, deducem că $a-3\mid a+3$, de unde $a-3\mid 6$, adică $a\in\{4,5,6,9\}$. Verificând, obţinem $a=6$, $y=3$ şi $x=25$. .... **(3p)**

Problema 3. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB > AD$ şi E un punct în plan astfel încât $BDEC$ să fie trapez isoscel. Să se arate că:

a) $AE \perp EC$; *b*) $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle CAB$.

Barem de corectare. *a*) Deoarece $ABCD$ este dreptunghi şi $BDEC$ trapez isoscel rezultă că $AD \equiv BC \equiv DE$, deci $\triangle DAE$ este isoscel. Cum $AD \parallel BC$ şi $BDEC$ trapez isoscel rezultă $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle BDE$. adică DB este bisectoarea unghiului ADE, deci $DB \perp AE$. Cum $DB \parallel EC$ deducem că $AE \perp EC$. . . . .(**4p**)

b) Deoarece $\sphericalangle ADC = \sphericalangle AEC = 90°$ obţinem că patrulaterul $ADEC$ este inscriptibil, de unde $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle DCE$. Cum $BDEC$ este trapez isoscel şi $ABCD$ este dreptunghi, avem că $\sphericalangle DCE \equiv \sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle CAB$, prin urmare $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle CAB$.. . . . . (**3p**)

Problema 4. Fie $ABCD$ un pătrat. Notăm cu M simetricul lui B faţă de C. Pe semidreapta $[CA$ se consideră punctul N astfel încât $\sphericalangle NMB = 30°$. Dreapta MN intersectează AD şi BD în punctele P respectiv Q.

a) Să se calculeze măsura unghiului BQP.

b) Să se arate că $BP \equiv BQ$.

Barem de corectare. *a*) Cum $ABCD$ este pătrat, rezultă că $\sphericalangle DBC = 45°$, de unde $\sphericalangle PQB = \sphericalangle BMQ + \sphericalangle QBC = 30° + 45° = 75°$. . . . .(**3p**)

b) Fie $\{E\} = DC \cap MN$. În triunghiurile CME şi DPE aplicând teorema unghiului de $30°$ obţinem $ME = 2CE$ şi $EP = 2ED$ de unde $MP = ME + EP = 2\,(CE + ED) = 2CD = 2BC = MB$. Atunci triunghiul MBP este isoscel şi $\sphericalangle MPB = \dfrac{1}{2}\,(180° - \sphericalangle BMP) = 75°$. Prin urmare $\sphericalangle PQB = \sphericalangle QPB = 75°$ deci $\triangle BPQ$ este isoscel şi $BP \equiv BQ$ . . . . (**4p**)

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 8. 02. 2025
BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII – a

Problema 1. Determinaţi tripletele (x, y, z) de numere întregi ştiind că

$$x^2 + 4y^2 - 4x + 12y + |4z - 5| + 11 = 0.$$

Barem de corectare. Relaţia dată se scrie echivalent $(x-2)^2 + (2y+3)^2 + |4z-5| = 2$. (**2p**)
Cum $x, y, z \in \mathbb{Z}$, obţinem că $(x-2)^2, (2y+3)^2, |4z-5| \in \mathbb{N}$, iar din faptul că ultimele două numere sunt impare, rezultă că $(2y+3)^2 = |4z-5| = 1$ şi $(x-2)^2 = 0$, ... (**3p**)
de unde obţinem că $(x, y, z) \in \{(2, -1, 1), (2, -2, 1)\}$ .... (**2p**)

Problema 2. Fie $E(n) = \sqrt{4n^2 + n}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

a) Determinaţi $[E(n)]$;

b) Arătaţi că pentru $n \geqslant 2$, primele două zecimale ale numărului $E(n)$ sunt 2 şi 4.

Notă. $[x]$ *reprezintă partea întreagă a numărului* x.

Barem de corectare. *a*) Din $4n^2 \leq 4n^2 + n < (2n+1)^2$, rezultă că $[E(n)] = 2n$ .... (**3p**)

b) Deoarece $E(n) = [E(n)] + \{E(n)\} = 2n + \{E(n)\}$, primele două zecimale ale numărului $E(n)$ sunt 2 şi 4 dacă $[100 \cdot \{E(n)\}] = 24 \Leftrightarrow [100(E(n) - 2n)] = 24$. Pentru aceasta, se arăta că $2n + \frac{6}{25} \leq \sqrt{4n^2+n} < 2n + \frac{1}{4}$, pentru $n \geq 2$ .... (**4p**)

Problema 3. Fie $x, y, z > 0$. Să se arate că:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geqslant \frac{2}{\sqrt{xy}}$;

b) $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$;

c) dacă $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 2025$, atunci

$$\frac{x(2x+1) + y(2y+1)}{xy} + \frac{y(2y+1) + z(2z+1)}{yz} + \frac{z(2z+1) + x(2x+1)}{zx} \geqslant \frac{2702}{225}.$$

Barem de corectare. Pentru demonstrarea inegalităţilor de la *a*) şi *b*) se acordă câte **2** puncte.

c) Cum $M_s = 2 \cdot \left(\frac{x^2+y^2}{xy} + \frac{y^2+z^2}{yz} + \frac{z^2+x^2}{yz}\right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)$, ... (**1p**)

din $\frac{x^2+y^2}{xy}, \frac{y^2+z^2}{yz}, \frac{z^2+x^2}{yz} \geq 2$ .... (**1p**)

şi din inegalităţile de la *a*) şi *b*) obţinem

$M_s \geqslant 12 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}\right) \geqslant 12 + 2 \cdot \frac{9}{\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}} \geqslant 12 + 2 \cdot \frac{9}{2025} = \frac{2702}{225}$. (**1p**)

Problema 4. Fie M şi N mijloacele muchiilor $B'C'$, respectiv $C'D'$ ale cubului $ABCDA'B'C'D'$.

a) Arătaţi că $MN \parallel (A'BD)$ şi determinaţi tangenta unghiului dintre dreapta CN şi planul $(A'AC)$.

b) Determinaţi cosinusul unghiului dintre dreptele AM şi BN.

Barem de corectare. *a*) MN este linie mijlocie în triunghiul $C'B'D'$, deci $MN \parallel B'D'$. Dar $BDD'B'$ este paralelogram, deci $B'D' \parallel BD$, de unde rezultă că $MN \parallel BD$. Cum $BD \subset (A'BD)$, obţinem $MN \parallel (A'BD)$. .... **(2p)**

Din $MN \parallel B'D'$, $B'D' \perp A'C'$, $B'D' \perp AA'$, $A'C', AA' \subset (A'AC)$, $A'C' \cap AA' \neq \varnothing$, obţinem $MN \perp (A'AC)$. .... **(2p)**

Dacă $MN \cap A'C' = \{S\}$, atunci $\sphericalangle(CN, (A'AC)) = \widehat{NCS}$. În triungiul $\triangle NSC$, dreptunghic în S, obţinem $\operatorname{tg} \widehat{NCS} = \dfrac{NS}{SC}$ şi calculând NS, SC în funcţie de lungimea $2x$ a muchiei cubului, rezultă $\operatorname{tg} \widehat{NCS} = \dfrac{1}{3}$. .... **(2p)**

b) Fie $E \in D'C'$, astfel încât $D' \in (EC')$ şi $D'E = \dfrac{D'C'}{2}$. Se arată că $ABNE$ este paralelogram. Prin urmare, $BN \parallel AE$ şi $\sphericalangle(AM, BN) = \sphericalangle(AM, AE)$. Se arată că $AM = AE = 3x$, iar $EM = x\sqrt{10}$ şi se obţine $\cos \widehat{EAM} = \dfrac{4}{9}$. .... **(1p)**

---

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2025

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX – a

Problema 1. În planul triunghiul ABC se consideră punctele M, N şi P astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{n+4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{n}{n+4} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{n+4} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{n+1}{n+4} \cdot \overrightarrow{BA}$, respectiv $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{n+4} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{n+2}{n+4} \cdot \overrightarrow{CB}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că există un număr $\alpha > 0$, astfel încât $\overrightarrow{MB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CM}$;

b) Să se determine valoarea lui $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât dreptele AM, BN şi CP să fie concurente.

Barem de corectare. *a*) Din relaţia $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{n+4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{n}{n+4} \cdot \overrightarrow{AC}$, care se scrie echivalent $n\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}\right) = 4\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}\right) \Leftrightarrow n \cdot \overrightarrow{CM} = 4 \cdot \overrightarrow{MB}$, rezultă că $M \in (BC)$ şi $\overrightarrow{MB} = \frac{n}{4} \cdot \overrightarrow{CM}$, adică $\alpha = \frac{n}{4}$ .... **(3p)**

b) Analog, din celelalte două relaţii se obţine că $N \in (AC)$, $P \in (AB)$, $\frac{NC}{NA} = \frac{n+1}{3}$ şi $\frac{PA}{PB} = \frac{n+2}{2}$. Dreptele AM, BN şi CP sunt concurente, dacă şi numai dacă $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1 \Leftrightarrow n(n+1)(n+2) = 24$, de unde se obţine că $n = 2$. .... **(4p)**

Problema 2. Fie a, b şi c trei numere reale care verifică relaţiile $a + b + c = 12$, $a^2 + b^2 + c^2 = 56$ şi $abc = 48$. Să se calculeze $ab + ac + bc$ şi valoarea expresiei

$$E = \frac{1}{ab + c - 11} + \frac{1}{bc + a - 11} + \frac{1}{ca + b - 11}.$$

Barem de corectare. Avem $ab + ac + bc = \frac{1}{2}\left((a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)\right) = 44$, ... **(2p)**

respectiv $E = \frac{1}{ab - a - b + 1} + \frac{1}{bc - b - c + 1} + \frac{1}{ca - c - a + 1} = \frac{1}{(a-1)(b-1)} + \frac{1}{(b-1)(c-1)} + \frac{1}{(a-1)(c-1)}$ .... **(3p)**

de unde $E = \frac{a+b+c-3}{(a-1)(b-1)(c-1)} = \frac{a+b+c-3}{abc - (ab+ac+bc) + (a+b+c) - 1} = \frac{3}{5}$ .... **(2p)**

Problema 3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

$a)$ dacă m şi n sunt două numere naturale de aceeaşi paritate, atunci

$$\frac{a^m + b^m}{2} \cdot \frac{a^n + b^n}{2} \leq \frac{a^{m+n} + b^{m+n}}{2};$$

$b)$ $\dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{a^2+b^2}{2} \cdot \dfrac{a^3+b^3}{2} \leq \dfrac{a^6+b^6}{2}.$

Barem de corectare. $a)$ Inegalitatea se scrie echivalent, $(a^m - b^m)(a^n - b^n) \geq 0$ .... **(2p)**
Cum numerele m şi n au aceeaşi paritate, $\operatorname{sgn}(a^m - b^m) = \operatorname{sgn}(a^n - b^n)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, de unde obţinem că $(a^m - b^m)(a^n - b^n) \geq 0$, adică are loc inegalitatea din enunţ. .... **(2p)**

$b)$ Folosind inegalitatea de la punctul $a)$, avem $M_s = \left(\dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{a^3+b^3}{2}\right) \cdot \dfrac{a^2+b^2}{2} \leq \dfrac{a^4+b^4}{2} \cdot \dfrac{a^2+b^2}{2} \leq \dfrac{a^6+b^6}{2}$ .... **(3p)**

Problema 4. Fie numerele $m, n \in \mathbb{N}^*$, cu $(m, n) = 1$.

$a)$ Să se arate că mulţimea $\left\{ \left\{ \dfrac{mk}{n} \right\} \;\middle|\; k = 1, 2, ..., n \right\}$ are n elemente;

$b)$ Să se calculeze $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{mk}{n} \right]$.

Notă. $[x]$ *şi* $\{x\}$ *reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului* x.

Barem de corectare. $a)$ Dacă $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ cu $i \neq j$, atunci $\left\{\dfrac{mi}{n}\right\} = \left\{\dfrac{mj}{n}\right\} \Leftrightarrow \dfrac{mi}{n} - \dfrac{mj}{n} = \dfrac{m(i-j)}{n} \in \mathbb{Z}$. Dar cum $(m, n) = 1$, rezultă că $n \mid i - j$, ceea ce este imposibil deoarece $0 < |i - j| < n$. Aşadar, mulţimea $\left\{ \left\{ \dfrac{mk}{n} \right\} \;\middle|\; k = 1, 2, ..., n \right\}$ are n elemente. .... **(3p)**

$b)$ Pentru fiecare $k \in \{1, 2, ..., n\}$, din teorema împărţirii cu rest, există un $q_k \in \mathbb{N}$ şi un $r_k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, astfel încât $mk = n \cdot q_k + r_k$, de unde $\left\{\dfrac{mk}{n}\right\} = \left\{q_k + \dfrac{r_k}{n}\right\} = \dfrac{r_k}{n}$. Obţinem astfel că $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left\{\frac{mk}{n}\right\} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{n-1}{2}$ .... **(2p)**

Aşadar, $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{mk}{n} - \left\{\frac{mk}{n}\right\}\right) = \frac{m}{n}\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{mk}{n}\right\} = \frac{m(n+1)}{2} - \frac{n-1}{2}$ .... **(2p)**

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2025

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X – a

Problema 1. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}$ (n radicali). Să se arate că, pentru orice $n \geq 1$, au loc relaţiile:

a) $x_n < 2$; *b*) $4(2-x_{n+1}) > 2-x_n$.

Barem de corectare. Se observă că $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, pentru orice $n \geq 1$.

a) Se verifică prin inducţie .... **(4p)**

b) Pentru orice $n \geq 1$, avem $4(2-x_{n+1}) > 2-x_n \Leftrightarrow 4x_{n+1} < x_n+6 \Leftrightarrow 4\sqrt{2+x_n} < x_n+6 \Leftrightarrow (2-x_n)^2 > 0$ ceea ce, deoarece $0 < x_n < 2$, este evident adevărat .... **(3p)**

Problema 2. Să se detemine funcţiile injective $f, g : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$, care satisfac relaţiile:

a) $f(x \cdot f(y)) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in (0,+\infty)$;

b) $g(x \cdot g(y)) = \dfrac{1}{g(g(x)\cdot y)}$, pentru orice $x, y \in (0,+\infty)$.

Barem de corectare. *a*) Din ipoteză, pentru orice $x, y \in (0,+\infty)$, rezultă că $f(x \cdot f(y)) = f(y \cdot f(x)) = f(x) \cdot f(y)$, de unde din injectivitatea lui f, obţinem că $x \cdot f(y) = y \cdot f(x)$. Aşadar $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(y)}{y}$, $\forall\ x, y \in (0,+\infty)$, de unde rezultă că există un $a > 0$, astfel încât $\dfrac{f(x)}{x} = a$, $\forall\ x \in (0,+\infty)$, adică $f(x) = a \cdot x$, $\forall\ x \in (0,+\infty)$ .... **(3p)**

b) Dacă în relaţia din enunţ luăm $y = x$, obţinem că $[g(x \cdot g(x))]^2 = 1$, de unde rezultă că $g(x \cdot g(x)) = 1$, $\forall\ x \in (0,+\infty)$. Cum funcţia g este injectivă, există un $a > 0$, astfel încât $x \cdot g(x) = a$, $\forall\ x \in (0,+\infty)$, adică $g(x) = \dfrac{a}{x}$, $\forall\ x \in (0,+\infty)$ .... **(3p)**

Verificarea soluţiilor obţinute la punctele *a*) şi *b*) .... **(1p)**

Problema 3. Să se calculeze $|z_1+z_2+z_3|$, ştiind că z_1, z_2 şi z_3 sunt trei numere complexe cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1+z_2+z_3 \neq 0$ şi $z_1^2+z_2^2+z_3^2 = 0$. Să se găsească trei numere complexe z_1, z_2 şi z_3 care verifică aceste relaţii.

Barem de corectare. Din $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, rezultă că $\overline{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$, $\overline{z}_2 = \dfrac{1}{z_2}$ şi $\overline{z}_3 = \dfrac{1}{z_3}$, .. **(2p)**

iar din $z_1^2+z_2^2+z_3^2 = 0$, rezultă că $(z_1+z_2+z_3)^2 = 2(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)$ .... **(1p)**

Aşadar, dacă $z = z_1+z_2+z_3$, atunci $\overline{z} = \dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3} = \dfrac{z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}{z_1z_2z_3} = \dfrac{z^2}{2\cdot z_1z_2z_3}$ şi $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = \dfrac{z^3}{2\cdot z_1z_2z_3}$. Astfel, obţinem că $z^3 = 2\cdot z_1z_2z_3 \cdot |z|^2 \Rightarrow |z|^3 = 2\cdot|z|^2$, adică $|z| = 2$.**(3p)**

De exemplu, numerele 1 şi $\dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ satisfac relaţiile din problemă .... **(1p)**

Problema 4. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0,1)$ sau $a, b, c \in (1,+\infty)$, atunci

$$\log_{a^2 b} a + \log_{b^2 c} b + \log_{c^2 a} c \leq 1$$

Barem de corectare. Dacă $s \in \begin{cases} (0,1), & \text{dacă } a,b,c \in (0,1) \\ (1,+\infty), & \text{dacă } a,b,c \in (1,+\infty) \end{cases}$ şi notăm $\log_s a = A$, $\log_s b = B$, $\log_s c = C$, atunci $A, B, C > 0$ .... **(1p)**

Inegalitatea se scrie echivalent

$$\frac{A}{2A+B} + \frac{B}{2B+C} + \frac{C}{2C+A} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2A}{2A+B} + \frac{2B}{2B+C} + \frac{2C}{2C+A} \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{B}{2A+B} + 1 - \frac{C}{2B+C} + 1 - \frac{A}{2C+A} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{B}{2A+B} + \frac{C}{2B+C} + \frac{A}{2C+A} \geq 1$$ .. **(4p)**

Dar, din inegalitatea lui Titu Andreescu obţinem $\frac{B}{2A+B} + \frac{C}{2B+C} + \frac{A}{2C+A} = \frac{B^2}{B(2A+B)} + \frac{C^2}{C(2B+C)} + \frac{A^2}{A(2C+A)} \geq \frac{(B+C+A)^2}{B(2A+B)+C(2B+C)+A(2C+A)} = 1$, ceea ce demonstrază inegalitatea dată. .... **(2p)**

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2025

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI – a

Problema 1. Se consideră matricea $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 4} \in M_4(\mathbb{R})$, unde

$$a_{ij} = \begin{cases} 7, & \text{dacă } i = j \\ 5, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}, \quad \text{pentru } i, j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Să se calculeze A^n, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

Barem de corectare. Matricea A se scrie $A = 2\cdot I_4 + 5\cdot B$, unde $B = (a_{ij})_{1\le i,j\le 4}$ cu $b_{ij} = 1$, pentru fiecare $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ .... **(1p)**

Cum $B^2 = 4 \cdot B$, inductiv se obţine că $B^k = 4^{k-1} \cdot B$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ .... **(2p)**

Aşadar,

$$A^n = (2I_4 + 5B)^n = 2^n I_4 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k 2^{n-k} 5^k \cdot B^k = 2^n I_4 + \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k 2^{n-k} 5^k 4^{k-1}\right) \cdot B \text{ .... } \mathbf{(2p)}$$

$$= 2^n I_4 + \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} 5^k 4^k - 2^n\right) \cdot B = 2^n \cdot I_4 + \frac{1}{4}(22^n - 2^n) \cdot B \text{ .... } \mathbf{(2p)}$$

Problema 2. Fie $n \geq 2$ un număr natural şi mulţimea

$$M = \{(A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \mid A \neq B \text{ şi } AB = A + B\}.$$

a) să se arate că mulţimea M are o infinitate de elemente;

b) să se arate că dacă $(A, B) \in M$, atunci $AB = BA$.

Barem de corectare.

a) De exemplu, $\left(a \cdot I_n, \dfrac{a}{a-1} \cdot I_n\right) \in M$, pentru orice $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$ .... **(3p)**

b) Dacă $(A, B) \in M$, atunci $AB = A + B \Leftrightarrow (A - I_n)(B - I_n) = I_n$, adică matricele $A - I_n$ şi $B - I_n$ sunt inversa una celeilalte, de unde rezultă că $(B - I_n)(A - I_n) = I_n$. De aici se obţine că $AB = BA = A + B$ .... **(4p)**

Problema 3. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{b^k}$, unde $a, b \in (0, +\infty)$; *b*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{x}}}{x}$.

Barem de corectare. *a*) Dacă notăm limita cu $L(a, b)$, atunci din lema Cesaro-Stolz, avem

$$L(a, b) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{b^k}}{\frac{n!}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{b^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{a^{n+1}} - \frac{n!}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+1-a}\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} \text{ .... } \mathbf{(2p)}$$

de unde $L(a,b) = \begin{cases} 0, & a < b \\ 1, & a = b \\ +\infty, & a > b \end{cases}$ .... (**1p**)

b) Dacă notăm limita cu L, atunci

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}} - e^{\frac{\ln(1+2x)}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+2x)}{x}} \cdot \frac{e^{\frac{2\ln(1+x)-\ln(1+2x)}{x}} - 1}{x} \text{ .... } (\mathbf{2p})$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+2x)}{x}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{2\ln(1+x)-\ln(1+2x)}{x}} - 1}{\frac{2\ln(1+x)-\ln(1+2x)}{x}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2\ln(1+x) - \ln(1+2x)}{x^2} \text{ .... } (\mathbf{1p})$$

$$= e^2 \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln\left(1 + \frac{x^2}{2x+1}\right)}{\frac{x^2}{2x+1}} \cdot \frac{1}{2x+1} \right) = e^2 \text{ .... } (\mathbf{1p})$$

Problema 4. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $x_0 = \sqrt{2}$ şi $x_{n+1} = \sqrt{2}^{\,x_n}$, pentru $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi să i se calculeze limita.

Barem de corectare. Se demonstrează prin inducţie că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x_n < 2$ ..... (**2p**)
si că $x_{n+1} > x_n$ .... (**2p**)
Aşadar, şirul este monoton şi mărginit, deci convergent. Dacă notăm limita şirului cu l şi trecem la limită în relaţia de recurenţă, obtinem că $\sqrt{2}^{\,l} = l$ .... (**1p**)
Din $x_n < 2$ rezultă că $l \le 2$, şi cum singurele soluţii ale ecuaţiei $\sqrt{2}^{\,x} = x$ sunt $x = 2$ şi $x = 4$ (o dreaptă intersectează graficul unei funcţii strict convexe în cel mult două puncte), se obţine că limita şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este $l = 2$ .... (**2p**)

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2025

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII – a

Problema 1. Fie $M(x) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2x+3 & -x & -x \\ -x & 2x+3 & -x \\ -x & -x & 2x+3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, unde $x \in \mathbb{R}$ şi mulţimea $G = \{M(x) \mid x \in \mathbb{R},\ x \neq -1\}$.

a) Să se arate că G are o structură de grup abelian în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor;

b) Să se calculeze P^n pentru $n \in \mathbb{N}^*$, unde $P = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Barem de corectare. Dacă notăm $A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, atunci $M(x) = I_3 + x \cdot A$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Cum $A^2 = A$, obţinem că $M(x) \cdot M(y) = M(x+y+xy) = M((x+1)(y+1)-1)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. .... **(2p)**

a) Dacă $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, atunci $M(x) \cdot M(y) = M((x+1)(y+1)-1) \in G$. Deoarece $M(x) \cdot M(y) = M(y) \cdot M(x) = M(x+y+xy)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, înmulţirea matricelor este asociativă, elementul neutru este $I_3 = M(0) \in G$, iar $M(x)^{-1} = M\left(\frac{1}{x+1} - 1\right) \in G$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, rezultă că $(G, \cdot)$ este un grup abelian. .... **(3p)**

b) Inductiv se demonstrează că $M(x)^n = M((x+1)^n - 1)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$. Aşadar, $P^n = M(6)^n = M(7^n - 1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. .... **(2p)**

Problema 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi mulţimea $Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx,\ \forall\ g \in G\}$. Să se arate că:

a) $Z(G)$ este un subgrup al lui G;

b) dacă $x^2 = e$, pentru orice element $x \in G \setminus Z(G)$, atunci grupul G este comutativ.
(cu e s-a notat elementul neutru al grupului G)

Barem de corectare.

a) Evident, dacă $g \in G$, atunci $eg = ge = g$, adică $e \in Z(G)$. Dacă $x, y \in Z(G)$, atunci pentru orice $g \in G$, avem $(xy)g = x(yg) = x(gy) = (xg)y = (gx)y = g(xy)$, respectiv $xg = gx \Leftrightarrow gx^{-1} = x^{-1}g$, adică $xy, x^{-1} \in Z(G)$ .... **(3p)**

$b)$ Fie $x, y \in G$.

Dacă $x \in Z(G)$ sau $y \in Z(G)$, atunci $xy = yx$ .... **(1p)**

Presupunem acum că $x, y \notin Z(G)$. Dacă $xy \in Z(G)$, atunci $(xy)y = y(xy) \Leftrightarrow xy^2 = yxy \Leftrightarrow xy = yx$, respectiv dacă $xy \notin Z(G)$, atunci $(xy)^2 = x^2 = y^2 = e$, de unde $(xy)^2 = x^2y^2 \Leftrightarrow xyxy = x^2y^2 \Leftrightarrow yx = xy$ .... **(3p)**

Problema 3. Să se calculeze:

$$a) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\left(4 - \sin^2 x\right)(1 + 2^x)} dx; \qquad b) \int \frac{x^3 - 1}{x^6 + 4x^3 + 2025x^2 + 4} dx, \quad x \in (0, +\infty).$$

Barem de corectare. Notăm cu I integrala de la punctul $a)$. Avem

$a)$ Din $I \overset{-x=t}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^t \cos t}{\left(4 - \sin^2 t\right)(1 + 2^t)} dx \overset{\text{not.}}{=} J$, rezultă că $I + J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4 - \sin^2 x} dx = \frac{\ln 3}{2}$, de unde $I = J = \frac{\ln 3}{4}$ .... **(4p)**

$b)$ $\int \frac{x^3 - 1}{x^6 + 4x^3 + 2025x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)'}{\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^2 + 2025} dx = \frac{1}{90} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + \frac{2}{x}}{45} + c$ .... **(3p)**

Problema 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că

$$f(x) = 2\left(1 + x^2\right) \cdot \left(1 + \int_0^x \frac{f(t)}{1 + t^2} dt\right), \quad \text{pentru fiecare } x \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că:

$a)$ funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}$;

$b)$ există o singură funcţie f care satisface condiţia din enunţ. Să se determine această funcţie.

Barem de corectare. $a)$ Considerăm funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $h(x) = \frac{f(x)}{1 + x^2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Cum f este continuă, rezultă că şi funcţia h este continuă, deci admite primitive. Dacă $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui h, atunci relaţia din enunţ se poate scrie echivalent $f(x) = 2\left(1 + x^2\right) \cdot (1 + H(x) - H(0))$. Aşadar, deoarece funcţia H este derivabilă pe $\mathbb{R}$, rezultă că şi f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ .... **(4p)**

$b)$ Din $h(x) = 2(1 + H(x) - H(0))$, rezultă că $h'(x) = 2 \cdot h(x)$, de unde $h(x) = c \cdot e^{2x}$. Cum $h(0) = 2$, se obţine că $h(x) = 2 \cdot e^{2x}$, adică $f(x) = 2\left(1 + x^2\right) \cdot e^{2x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ .... **(3p)**

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.