# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

## Etapa locală - 8. 02. 2025

## Clasa a V – a

**1.Feladat** Adottak az $A = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^{2024}$ és $B = 7 \cdot 7^3 \cdot 7^5 \cdot ... \cdot 7^{89}$ számok.

$a)$ Határozd meg a $B$ szám utolsó számjegyét;

$b)$ Hasonlítsd össze a $6A + 1$ és $B$ számokat.

**2.Feladat** Egy asztalon 200 golyó található. Alex és Bob váltakozva felvesznek az asztalról néhány golyót úgy, hogy a felvett golyók száma 1 és 6 között legyen. A játék nyertese az, aki felveszi az utolsó golyót. Tudva, hogy Alex kezdi a játékot, határozz meg egy nyerő stratégiát ezen jatékos számára.

**3.Feladat** Adott az $N = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2024 + 2025$ szám.

$a)$ Határozd meg az $N$ szám utolsó 224 számjegyének az összegét;

$b)$ Mennyivel egyenlő az $N$ számnak a $10^{225}$ számmal való osztási maradéka?

**4.Feladat** Határozd meg azokat az $a, b$ és $c$ természetes számokat, amelyekre $a^2 + b^2 = 4^c + 207$.

[1] Munkaidő 3 óra;
[2] Minden feladat kötelező;
[3] Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

## Etapa locală - 8. 02. 2025

## Clasa a VI – a

**1.Feladat**

*a*) Igazold, hogy az $a = 3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^{2025}$ szám osztható 4-gyel;

*b*) Ha $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^m = 3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^n$, akkor igazold, hogy $m = n = 0$.

**2.Feladat**

*a*) Határozd meg az $\overline{abc}$ számot tudva, hogy az $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, és $\overline{bc}$ számok egyenesen arányosak a $27, 28$ és $23$ számokkal.

*b*) Léteznek-e olyan $\overline{abc}$ alakú természetes számok, amelyekre az $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, és $\overline{bc}$ számok egyenesen arányosak az $n$, $n+1$ és $n+2$ számokkal, ahol $n$ egy nullától különböző természetes szám? Indokold meg a választ!

**3.Feladat** A táblára egy $\widehat{XOY}$ tompaszög van rajzolva. A szög belső tartományában Andrei $n$ darab $OA_1, OA_2, ..., OA_n$ félegyenest szerkeszt úgy, hogy

$$\widehat{XOA_1} = \widehat{A_1OA_2} = ... = \widehat{A_{n-1}OA_n} = \widehat{A_nOY} = 3°,$$

majd Bianca $m$ darab $OB_1, OB_2, ..., OB_m$ félegyenest szerkeszt úgy, hogy

$$\widehat{XOB_1} = \widehat{B_1OB_2} = ... = \widehat{B_{m-1}OB_m} = \widehat{B_mOY} = 5°.$$

*a*) Határozd meg az $\widehat{A_5OB_7}$ szög mértékét;

*b*) Határozd meg az $\widehat{XOY}$ szög mértékének a lehető legkisebb értékét;

*c*) Határozd meg az $\widehat{XOY}$ szög mértékét tudva, hogy az $\widehat{XOY}$ szög belsejében pontosan 8 olyan félegyenes található, amelyet mindkét gyerek megszerkesztett.

**4.Feladat** Minden $n$ természetes szám esetén tekintsük az $A_n = \{d \in \mathbb{N} \mid 10^n \vdots d\}$ halmazt.

*a*) Hány eleme van az $A_{10}$ halmaznak? Ezek közül hány teljes négyzet?

*b*) Igazold, hogy nem létezik két olyan $B$ és $C$ halmaz, amelyekre egyidejűleg teljesülnek a következő feltételek: $B \cap C = \varnothing$, $B \cup C = A_{2024}$ és a $B$ halmaz elemeinek összege egyenlő a $C$ halmaz elemeinek összegével.

[1] Munkaidő 3 óra;
[2] Minden feladat kötelező;
[3] Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

## Etapa locală - 8. 02. 2025

## Clasa a VII – a

**1.Feladat** Adott a következő halmaz:

$$A=\left\{\frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{\sqrt{1\cdot 5}},\frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{\sqrt{5\cdot 9}},\frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{\sqrt{9\cdot 13}},\dots,\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2021}}{\sqrt{2021\cdot 2025}}\right\}.$$

*a*) Számítsátok ki az $A$ halmaz elemeinek összegét;

*b*) Mutassátok ki, hogy az $A$ halmaz bármely nem üres részhalmaza elemeinek az összege **nem** természetes szám.

**2.Feladat**

*a*) Adottak az $a, b$ és $c$ nullától különböző számjegyek úgy, hogy $\sqrt{\overline{0,0\,(a)}+\overline{0,0\,(b)}+\overline{0,0\,(c)}}\in\mathbb{Q}$. Mutassátok ki, hogy $\sqrt{(a+b+c)^{2025}+2026}\notin\mathbb{Q}$;

*b*) Határozzátok meg az $x$ és $y$ természetes számokat, melyekre $\sqrt{x+24}=\sqrt{3^y+9}+1$.

**3. Feladat** Legyen $ABCD$ egy téglalap, melyben $AB > AD$ és $E$ a sík egy olyan pontja amelyre $BDEC$ egy egyenlő szárú trapéz. Mutassátok ki, hogy:

*a*) $AE\perp EC$;

*b*) $\widehat{DAE}\equiv\widehat{CAB}$.

**4. Feladat** Legyen $ABCD$ egy négyzet. Jelöljük $M$-mel a $B$ pontnak a $C$ pont szerinti szimmetrikusát. A $[CA$ félegyenesen felvesszük az $N$ pontot úgy, hogy az $\widehat{NMB}=30^\circ$ legyen. Az $MN$ egyenes az $AD$ és a $BD$ egyeneseket a $P$ illetve a $Q$ pontokban metszi.

*a*) Számítsátok ki a $BQP$ szög mértékét;

*b*) Igazoljátok, hogy $BP\equiv BQ$.

[1]Munkaidő 3 óra;

[2]Minden feladat kötelező;

[3]Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
## Etapa locală - 8. 02. 2025
## Clasa a VIII – a

**1.Feladat** Határozzátok meg az $(x, y, z)$ egész számokból álló számhármasokat, ha tudjuk, hogy

$$x^2 + 4y^2 - 4x + 12y + |4z - 5| + 11 = 0.$$

**2. Feladat** Adott $E(n) = \sqrt{4n^2 + n}$, ahol $n \in \mathbb{N}$.

$a)$ Határozzátok meg: $[E(n)]$;

$b)$ Mutassátok ki ha $n \geqslant 2$, akkor az $E(n)$ szám első két tizedese 2 és 4.

**Megjegyzés**. $[x]$ az $x$ szám egész részét jelenti.

**3. Feladat** Legyen $x, y, z > 0$. Igazoljátok, hogy:

$a)$ $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geqslant \dfrac{2}{\sqrt{xy}}$; $\qquad$ $b)$ $(x + y + z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) \geq 9$;

$c)$ ha $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 2025$, akkor

$$\frac{x(2x+1) + y(2y+1)}{xy} + \frac{y(2y+1) + z(2z+1)}{yz} + \frac{z(2z+1) + x(2x+1)}{zx} \geqslant \frac{2702}{225}.$$

**4.Feladat** Legyen $M$ és $N$ az $ABCDA'B'C'D'$ kocka $B'C'$, illetve a $C'D'$ éleinek a felezőpontja.

$a)$ Mutassátok ki, hogy $MN \parallel (A'BD)$ és határozzátok meg a $CN$ egyenes és az $(A'AC)$ sík által alkotott szög tangensét;

$b)$ Határozzátok meg az $AM$ és $BN$ egyenesek által alkotott szög koszinuszát.

[1] Munkaidő 3 óra;
[2] Minden feladat kötelező;
[3] Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

## Etapa locală - 8. 02. 2025

## Clasa a IX – a

**1.Feladat** Az $ABC$ háromszög síkjában felvesszük az $M, N$ és $P$ pontokat úgy, hogy $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{n+4}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{n}{n+4}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{n+4}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{n+1}{n+4}\cdot\overrightarrow{BA}$, illetve $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{n+4}\cdot\overrightarrow{CA}+\frac{n+2}{n+4}\cdot\overrightarrow{CB}$, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

*a)* Igazold, hogy létezik egy $\alpha > 0$ szám úgy, hogy $\overrightarrow{MB} = \alpha\cdot\overrightarrow{CM}$;

*b)* Határozd meg az $n \in \mathbb{N}^*$ számot úgy, hogy az $AM$, $BN$ és $CP$ összefutó egyenesek legyenek.

**2.Feladat** Legyen $a, b$ és $c$ három valós szám, amelyek teljesítik a következő feltételeket $a+b+c = 12$, $a^2+b^2+c^2 = 56$, és $abc = 48$. Számítsd ki az $ab+ac+bc$ értékét illetve a következő kifejezés értékét

$$E = \frac{1}{ab+c-11}+\frac{1}{bc+a-11}+\frac{1}{ca+b-11}.$$

**3.Feladat** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Mutassátok ki, hogy:

*a)* ha $m$ és $n$ két azonos paritású természetes szám, akkor

$$\frac{a^m+b^m}{2}\cdot\frac{a^n+b^n}{2} \leq \frac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2};$$

*b)* $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2} \leq \frac{a^6+b^6}{2}$.

**4.Feladat** Legyen $m, n \in \mathbb{N}^*$ és $(m, n) = 1$.

*a)* Mutassátok ki, hogy a következő halmaznak $\left\{\left\{\frac{mk}{n}\right\} \,\middle|\, k = 1, 2, ..., n\right\}$ $n$ eleme van;

*b)* Számítsátok ki az $S = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{mk}{n}\right]$ összeget.

**Megjegyzés**. $[x]$ és $\{x\}$ jelöli az $x$ szám egész részét illetve törtrészét

[1] Munkaidő 3 óra;
[2] Minden feladat kötelező;
[3] Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

## Etapa locală - 8. 02. 2025

## Clasa a X – a

**1.Feladat** Adott az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat, ahol $x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}$ ($n$ darab gyök). Igazold, hogy bármely $n \geq 1$ esetén teljesülnek a következő összefüggések:

$a)$ $x_n < 2$; $b)$ $4\,(2 - x_{n+1}) > 2 - x_n$.

**2.Feladat** Határozd meg azokat az $f, g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ injektív függvényeket, amelyek teljesítik a következő összefüggéseket:

$a)$ $f\,(x \cdot f\,(y)) = f\,(x) \cdot f\,(y)$, minden $x, y \in (0, +\infty)$ esetén;

$b)$ $g\,(x \cdot g\,(y)) = \dfrac{1}{g\,(g\,(x) \cdot y)}$, minden $x, y \in (0, +\infty)$ esetén.

**3.Feladat** Számítsd ki a $|z_1 + z_2 + z_3|$ értékét tudva, hogy $z_1, z_2$ és $z_3$ három olyan komplex szám, amelyekre $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, és $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Keress három olyan $z_1, z_2$ és $z_3$ komplex számot, amelyek teljesítik ezeket a feltételeket.

**4.Feladat** Igazold, hogy ha $a, b, c \in (0, 1)$ vagy $a, b, c \in (1, +\infty)$, akkor

$$\log_{a^2b} a + \log_{b^2c} b + \log_{c^2a} c \leq 1.$$

[1]Munkaidő 3 óra;

[2]Minden feladat kötelező;

[3]Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

## Etapa locală - 8. 02. 2025

## Clasa a XI – a

**1.Feladat** Adott a következő mátrix $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 4} \in M_4(\mathbb{R})$, ahol

$$a_{ij} = \begin{cases} 7, & \text{ha } i = j \\ 5, & \text{ha } i \neq j \end{cases}, \text{ minden } i, j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Számítsd ki $A^n$, ha $n \in \mathbb{N}^*$.

**2. Feladat** Legyen $n \geq 2$ egy természetes szám és tekintsük a következő halmazt:

$$M = \{(A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \mid A \neq B \text{ és } AB = A + B\}.$$

*a)* Igazold, hogy az $M$ halmaznak végtelen sok eleme van;

*b)* Igazold, hogy ha $(A, B) \in M$, akkor $AB = BA$.

**3.Feladat** Számítsd ki:

*a)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k!}{b^k}$, ahol $a, b \in (0, +\infty)$;

*b)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{x}}}{x}$.

**4. Feladat** Tekintsük az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, ahol $x_0 = \sqrt{2}$ és $x_{n+1} = \sqrt{2}^{\,x_n}$, bármely $n \in \mathbb{N}$. Mutasd ki, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korvergens és számítsd ki a határértékét.

[1] Munkaidő 3 óra;
[2] Minden feladat kötelező;
[3] Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

## Etapa locală - 8. 02. 2025

## Clasa a XII – a

**1.Feladat** Adott az $M(x) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2x+3 & -x & -x \\ -x & 2x+3 & -x \\ -x & -x & 2x+3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, ahol $x \in \mathbb{R}$ és a $G = \{M(x) \mid x \in \mathbb{R},\ x \neq -1\}$ halmaz.

*a*) Igazold, hogy a $G$ halmaz a mátrixok szorzási műveletével egy Abel-féle csoportot alkot;

*b*) Számítsd ki $P^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, ahol $P = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

**2.Feladat** Legyen $(G, \cdot)$ egy csoport és adott a $Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx,\ \text{minden } g \in G\}$ halmaz. Igazold, hogy:

*a*) $Z(G)$ a $G$ egy részcsoportja;

*b*) Ha $x^2 = e$, bármely $x \in G \setminus Z(G)$ elem esetén, akkor a $G$ egy kommutatív csoport.

(az $e$ elem a $G$ csoport semleges elemét jelöli).

**3.Feladat** Számítsd ki:

*a*) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(4 - \sin^2 x)(1 + 2^x)} dx$;

*b*) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 1}{x^6 + 4x^3 + 2025x^2 + 4} dx,\ \ x \in (0, +\infty)$.

**4.Feladat** Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy olyan folytonos függvény, amelyre teljesül a következő tulajdonság

$$f(x) = 2\left(1 + x^2\right) \cdot \left(1 + \int_0^x \frac{f(t)}{1 + t^2} dt\right), \ \text{minden } x \in \mathbb{R}.$$

Igazold, hogy:

*a*) az $f$ függvény deriválható az $\mathbb{R}$ halmazon;

*b*) egy olyan $f$ függvény létezik, amely teljesíti a fenti feltételeket. Határozd meg ezt a függvény!

[1] Munkaidő 3 óra;
[2] Minden feladat kötelező;
[3] Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.