OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

Clasa a V – a

1. FELADAT Igazoljátok, hogy:

a) a 13^{2023} szám felírható két különböző teljes négyzet(négyzetszám) összegeként;

b) az $a = 1 + 12 + 12^2 + ... + 12^{2024}$ szám felírható 2025 négyzetszám összegeként.

2. FELADAT Adottak az $x = 2023^{2n+1} + 2024^n + n$ és $y = n + 2024^n$ számok, ahol n egy nullától különböző természetes szám.

a) Határozzátok meg az x utolsó számjegyét, ha $n = 2024$;

b) Igazoljátok, hogy ha x utolsó számjegye 5, akkor y nem lehet teljes négyzet.

3. FELADAT Egy táblára felírjuk a számokat 1-től 2024-ig. Viktor kiszámolja a táblán levő összes szám S összegét és P szorzatát.

a) Mennyi az $S + P$ szám 2024-el való osztási maradéka;

b) Miután letöröl a tábláról egy számot, Viktor újra kiszámolja a megmaradt számok S összegét és P szorzatát. Határozzátok meg, hogy melyik számot törölte le, ha tudjuk, hogy az $S + P$ számot 2024-el elosztva a maradék 2023.

4. FELADAT Hány olyan n természetes szám van, amelyben úgy a számjegyek összege, mint a számjegyek szorzata egyenlő 12-vel ?

[1] Tényleges munkaidő: 3 óra;
[2] Minden feladat kötelező;
[3] Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

Clasa a VI – a

1. FELADAT Határozzátok meg az n és r nullától különböző természetes számokat, ha tudjuk, hogy a 326, 420, 485 és 579 számokat elosztva az n számmal a maradék rendre r, $2r$, $3r$ illetve $4r$.

2. FELADAT Igazoljátok, hogy:

a) az $n = 1 + 2^5 + 2^{10} + ... + 2^{2025}$ szám osztható 33-al;

b) $\dfrac{4^{2^{2025}-1} + 2^{2^{2024}} + 1}{n}$ egy reducibilis (egyszerüsíthető) tört.

3. FELADAT Hány x és y természetes számpár létezik, amelyekre $(x, y) = 14$ és $[x, y] = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 10$?

Megjegyzés. (x, y) az x és y számok legnagyobb közös osztóját, míg $[x, y]$ az x és y számok legkisebb közös többszörösét jelöli.

4. FELADAT Adott az $\widehat{AOD}$ egyenesszög. Az AD egyenes ugyanazon az oldalán felvesszük a B és C pontokat úgy, hogy az $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ és $\widehat{COD}$ szögek fokokban kifejezett mértékei egyenesen arányosak legyenek három egymásután következő természetes számmal és $\mathrm{m}\left(\widehat{AOB}\right) < \mathrm{m}\left(\widehat{BOC}\right) < \mathrm{m}\left(\widehat{COD}\right)$.

a) Igazoljátok, hogy $\mathrm{m}\left(\widehat{BOC}\right) = 60\,°$;

b) Határozzátok meg hány megoldása van a feladatnak;

c) Felvesszük az E pontot az AD egyenesnek azon az oldalán, amelyiken B pont található úgy, hogy $OE \perp OC$; Számítsátok ki az $\widehat{EOF}$ szög mértékét tudva, hogy $(OF$ a $\widehat{COD}$ szögfelezője és $\mathrm{m}\left(\widehat{AOB}\right) = 40\,°$.

[1] Tényleges munkaidő: 3 óra;
[2] Minden feladat kötelező;
[3] Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

Clasa a VII – a

1. FELADAT

a) Határozzátok meg az $n \geq 2$ természetes számot, ha tudjuk, hogy

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3}}+\ldots+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{(n-1)\cdot n}}=1-\frac{1}{\sqrt{2023}};$$

b) Határozzátok meg azt a legkisebb x természetes számot, amelyre

$$\frac{\left|x-\sqrt{2}\right|}{x-\sqrt{2}}+\frac{\left|x-\sqrt{3}\right|}{x-\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\left|x-\sqrt{2024}\right|}{x-\sqrt{2024}}=n,$$

ahol n az a) alpontban meghatározott természetes szám.

2. FELADAT Határozzátok meg azokat az x valós számokat, amelyekre teljesül az

$$\{x\}-\{2024x\}=x$$

egyenlőség, ahol $\{a\}$ az a szám törtrészét jelöli.

3. FELADAT Az ABC háromszögben legyen M a BC oldal felezőpontja. Az AB oldalon felvesszük a D és E pontokat, az AC oldalon pedig az F és G pontokat úgy, hogy $DM \parallel CE$ és $MF \parallel BG$. Legyenek N és P a DF és EG szakaszok felezőpontjai . Bizonyítsátok be, hogy M, N és P pontok kollieneárisak.

4. FELADAT Adott az $ABCD$ négyzet, illetve az $M \in (BC)$ és $N \in (CD)$ pontok úgy, hogy $BM = CN$.Legyen $AC \cap BD = \{O\}$, $AM \cap BN = \{P\}$, $AC \cap BN = \{Q\}$, $AM \cap BD = \{H\}$.

a) Igazoljátok, hogy H az ABQ háromszög magasságponja (ortocentruma);

b) Számítsátok ki az $\widehat{OPA}$ mértékét.

[1] Tényleges munkaidő: 3 óra;
[2] Minden feladat kötelező;
[3] Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

Clasa a VIII – a

1. FELADAT

a) Tudva, hogy az a és b számok teljesítik az $a^2+b^2-18a-14b+130=0$

1. összefüggést, határozz meg egy nullától különböző természetes számokból álló (x, y) számpárt úgy, hogy teljesüljön a $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{ab}$ tulajdonság.

b) Határozd meg az összes olyan p prímszámot, amelyekhez létezik két nullától különböző x és y természetes szám úgy, hogy $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{21p}$ legyen.

2. FELADAT Ha $a, b, c \in (0, \infty)$ úgy, hogy $a+b+c=1$, akkor igazold, hogy:

a) $ab+ac+bc \leq \dfrac{1}{3}$; b) $\sqrt{a+bc} \leq \dfrac{a+1}{2}$; c) $\dfrac{b}{\sqrt{a+bc}}+\dfrac{c}{\sqrt{b+ac}}+\dfrac{a}{\sqrt{c+ab}} \geq \dfrac{3}{2}$.

3. FELADAT Legyen $ABCD$ egy rombusz, amelyben $\mathrm{m}\left(\widehat{DAB}\right)=120^\circ$ és $AC=6$ cm. Az (ABC) sík két különböző oldalán tekintsük a P és Q pontokat úgy, hogy $PA \perp (ABC)$, $CQ \perp (ABC)$, $PA=CQ$ és $DQ=6\sqrt{2}$ cm.

a) Határozd meg a CQ és PB egyenesek szögének mértékét;

b) Igazold, hogy a $PBQD$ négyszög egy rombusz.

4. FELADAT Legyen $ABCDA'B'C'D'$ egy téglatest, O legyen a középpontja és tekintsük az $M \in (AB)$, $N \in (AD)$ és $P \in (A\,A')$ pontokat.

A Q, R, S pontok legyenek rendre az O pontnak az M, N illetve P pontokra vonatkozó szimmetrikusai. Tudjuk, hogy $OM \cap (ADA')=\{Q\}$, $ON \cap (ABB')=\{R\}$ és $OP \cap (ABC)=\{S\}$.

a) Igazold, hogy a Q, R, S pontok nem kollineárisak;

b) Igazold, hogy $(QRS) \parallel (A'BD)$ és határozd meg a QRS és $A'BD$ háromszögek területeinek arányát.

[1] Tényleges munkaidő: 3 óra;
[2] Minden feladat kötelező;
[3] Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

MINISTERUL EDUCAȚIEI
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA FILIALA BIHOR
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

Clasa a IX – a

1. FELADAT Adott az A-ban derékszögű ABC háromszög. Ha D az A pont vetülete a BC-re, az E pont a $\widehat{BAC}$ szög szögfelezőjének a BC-vel való metszéspontja, az M pont pedig a BC átfogó felezőpontja, akkor igazold, hogy:

a) $[AE$ az $\widehat{MAD}$ szög szögfelezője;

b) $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 \overrightarrow{AD} + \left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right) \overrightarrow{AM}$.

2. FELADAT Adott az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat, amelyet a következőképpen értelmezünk: $x_1 = \frac{1}{4}$ és

$$\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} = \frac{2}{n^2+2n}, \quad \text{minden } n \geq 1 \text{ esetén.}$$

a) Határozd meg a sorozat általános tagját;

b) Igazold, hogy $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k+1)\, x_k < 1$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

3. FELADAT Oldd meg az $\left\{x + \frac{1}{6}\right\} + \left\{x + \frac{3}{6}\right\} + \left\{x + \frac{5}{6}\right\} = \frac{3\,(2x-1)}{2}$ egyenletet.

Megjegyzés. $\{a\}$ az a szám törtrészét jelenti.

4. FELADAT Igazold, hogy ha a, b és c egy háromszög oldalainak hosszát jelölik, akkor

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

[1] Tényleges munkaidő: 3 óra;
[2] Minden feladat kötelező;
[3] Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

Clasa a X – a

1. FELADAT Ha u és v két olyan komplex szám, amelyre $|u| = |v|$ és $2 \cdot |u+v| \geq |u+3v|$, akkor igazold, hogy $u = v$.

2. FELADAT Ha $n \in \mathbb{N}^*$, illetve $a, b, c \in (0,1)$ vagy $a, b, c \in (1, +\infty)$, akkor bizonyítsd be, hogy

$$\frac{1}{\log_a (bc^n)} + \frac{1}{\log_b (ca^n)} + \frac{1}{\log_c (ab^n)} \geq \frac{3}{n+1}.$$

3. FELADAT Legyen $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \{0\}$ és $f : M \to M$ egy olyan bijektív függvény, amely rendelkezik az

$$f(x) + f^{-1}(x) = x, \quad \forall\, x \in M.$$

tulajdonsággal.

a) Igazold, hogy az halmaz M szimmetrikus és az f függvény páratlan;

b) Adj példát egy ilyen tulajdonságokkal rendelkező függvényre.

Megjegyzés. Egy $M \subseteq \mathbb{R}$ halmazt szimmetrikusnak nevezünk, ha teljesül, hogy $x \in M \Leftrightarrow -x \in M$.

4. FELADAT Adott az $ABCD$ konvex négyszög, legyenek M, N, P és Q az AB, BC, CD, illetve AD szakaszok felezőpontjai. Legyenek az E, F, G és H pontok az AN, BP, CQ, illetve DM szakaszok azon pontjai, amelyekre $\dfrac{EA}{EN} = \dfrac{FB}{FP} = \dfrac{GC}{GQ} = \dfrac{HD}{HM}$.

a) Igazold, hogy $EFGH$ akkor és csak akkor paralelogramma, ha $ABCD$ is paralelogramma;

b) Igazold, hogy ha az $ABCD$ négyszög átlói kongruensek és merőlegesek egymásra, akkor $EG \perp FH$.

---

[1]Tényleges munkaidő: 3 óra;

[2]Minden feladat kötelező;

[3]Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

Clasa a XI – a

1. FELADAT

a) Határozzátok meg az a és b értékét úgy, hogy:

$$\lim_{x\to\infty}\left(a\sqrt[3]{x^3+bx^2+a}+b\sqrt{x^2+ax+b}-5x\right)=5;$$

b) Számítsátok ki $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2+2k+2}{k\,(k+1)\,(k+2)!}\right)^{(n+3)!}$.

2. FELADAT Tekintsük az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozatot, ahol $x_0>1$ és $x_{n+1}=\dfrac{2x_n+1}{x_n+2}$, bármely $n\in\mathbb{N}$. Tanulmányozzátok az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat konvergenciáját és számítsátok ki $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{x_n}-1\right)$.

3. FELADAT Oldjátok meg az $X^2=A$ mátrixegyenletet, ahol X az $M_2(\mathbb{R})$ halmaz egy eleme és $A=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{pmatrix}$.

4. FELADAT Adott az $A\in M_2(\mathbb{R})$ matrix. Igazoljátok, hogy ha $\operatorname{tr}A^{2024}=1$ és $\det\left(A^{2023}+A^{2022}+...+A+I_2\right)=0$, akkor $\det A=0$.

---

[1] Tényleges munkaidő: 3 óra;

[2] Minden feladat kötelező;

[3] Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

Clasa a XII – a

1. FELADAT Számítsátok ki:

a) $\displaystyle\int \frac{2-\cos^2 x+\sin 2x}{1+e^{-x}+\sin^2 x}dx;$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \arcsin\left(\cos^{2023} x\right)dx.$

2. FELADAT Legyen G egy 10 elemes csoport, melynek semleges eleme e. Mutassátok ki, hogy ha létezik két különböző $a, b \in G \setminus \{e\}$ elem úgy, hogy $a^2 = b^2 = e$, akkor a G nem Ábel-csoport.

3. FELADAT. Határozzátok meg az $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy a

$$G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & f(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R}^* \right\} \quad \text{halmaz}$$

Ábel-csoport legyen a mátrixok szorzására nézve.

4. FELADAT Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény és $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy primitív függvénye f-nek. Mutassátok ki, hogy nem létezik $a, b \in \mathbb{R}^*$ úgy, hogy

$$f(ax - bF(x)) = ax + b, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

---

[1] Tényleges munkaidő: 3 óra;
[2] Minden feladat kötelező;
[3] Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.