OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

Clasa a V – a

PROBLEMA 1. Să se demonstreze că:

a) numărul 13^{2023} se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte diferite;

b) numărul $a = 1 + 12 + 12^2 + ... + 12^{2024}$ se poate scrie ca o sumă de 2025 pătrate perfecte.

PROBLEMA 2. Se consideră numerele $x = 2023^{2n+1} + 2024^n + n$ şi $y = n + 2024^n$, unde n este un număr natural nenul.

a) Să se determine ultima cifră a lui x, ştiind că $n = 2024$;

b) Să se demonstreze că dacă ultima cifră a lui x este 5, atunci numărul y nu este pătrat perfect.

PROBLEMA 3. Pe o tablă sunt scrise toate numerele de la 1 la 2024. Victor calculează suma S şi produsul P al tuturor numerelor de pe tablă.

a) Care este restul împărţirii numărului $S + P$ la 2024;

b) După ce şterge unul dintre numere, Victor recalculează suma S şi produsul P al numerelor rămase. Să se afle numărul şters de pe tablă, ştiind că restul împărţirii numărului $S + P$ la 2024 este 2023.

PROBLEMA 4. Câte numere naturale n au proprietatea că atât suma cifrelor cât şi produsul cifrelor acestuia sunt egale cu 12?

---

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

Clasa a VI – a

PROBLEMA 1. Să se determine numerele naturale nenule n şi r, ştiind că numerele 326, 420, 485 şi 579 împărţite la n dau resturile r, $2r$, $3r$ respectiv $4r$.

PROBLEMA 2. Să se arate că:

a) numărul $n = 1 + 2^5 + 2^{10} + ... + 2^{2025}$ este divizibil cu 33;

b) fracţia $\dfrac{4^{2^{2025}-1} + 2^{2^{2024}} + 1}{n}$ este reductibilă.

PROBLEMA 3. Câte perechi de numere naturale x şi y există, astfel încât $(x, y) = 14$ şi $[x, y] = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 10$?

Notă. (x, y) reprezintă cel mai mare divizor comun, iar $[x, y]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor x şi y.

PROBLEMA 4. Fie unghiul alungit $\widehat{AOD}$. De aceeaşi parte a dreptei AD, considerăm punctele B şi C, astfel încât măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ şi $\widehat{COD}$ să fie exprimate în grade sexagesimale prin numere naturale, direct proporţionale cu trei numere naturale consecutive şi $\mathrm{m}\left(\widehat{AOB}\right) < \mathrm{m}\left(\widehat{BOC}\right) < \mathrm{m}\left(\widehat{COD}\right)$.

a) Să se demonstreze că $\mathrm{m}\left(\widehat{BOC}\right) = 60\,^\circ$;

b) Să se determine numărul de soluţii ale problemei;

c) De aceeaşi parte a dreptei AD ca şi punctul B, se consideră punctul E, astfel încât $OE \perp OC$; Să se calculeze măsura unghiului $\widehat{EOF}$, ştiind că $(OF$ este bisectoarea unghiului $\widehat{COD}$ şi că $\mathrm{m}\left(\widehat{AOB}\right) = 40\,^\circ$.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

Clasa a VII – a

PROBLEMA 1.

a) Să se determine numărul natural $n \geq 2$, pentru care

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3}}+\ldots+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{(n-1)\cdot n}}=1-\frac{1}{\sqrt{2023}};$$

b) Să se determine cel mai mic număr natural x, pentru care

$$\frac{\left|x-\sqrt{2}\right|}{x-\sqrt{2}}+\frac{\left|x-\sqrt{3}\right|}{x-\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\left|x-\sqrt{2024}\right|}{x-\sqrt{2024}}=n,$$

unde n este numărul natural determinat la punctul a).

PROBLEMA 2. Să se determine numerele reale x care satisfac egalitatea $\{x\}-\{2024x\}=x$, unde prin $\{a\}$ înţelegem partea fracţionară a lui a.

PROBLEMA 3. Fie triunghiul ABC, M mijlocul laturii BC şi punctele D şi E pe latura AB, F şi G pe latura AC, astfel încât $DM \parallel CE$ şi $MF \parallel BG$. Notăm cu N şi P mijloacele segmentelor DF, respectiv EG. Să se demonstreze că punctele M, N şi P sunt coliniare.

PROBLEMA 4. Considerăm pătratul $ABCD$, punctele $M \in (BC)$ şi $N \in (CD)$ astfel încât $BM = CN$, şi fie $AC \cap BD = \{O\}$, $AM \cap BN = \{P\}$, $AC \cap BN = \{Q\}$, $AM \cap BD = \{H\}$.

a) Să se arate că H este ortocentrul triunghiului ABQ;

b) Să se calculeze măsura unghiului $\widehat{OPA}$.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

Clasa a VIII – a

PROBLEMA 1.

a) Ştiind că numerele a şi b verifică relaţia $a^2+b^2-18a-14b+130=0$, să se găsească o pereche de numere naturale nenule (x,y), cu proprietatea $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{ab}$;

b) Să se determine toate numerele prime p, pentru care există două numere naturale nenule x şi y, astfel încât $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{21p}$.

PROBLEMA 2. Să se arate că dacă $a,b,c\in(0,\infty)$, astfel încât $a+b+c=1$, atunci:

a) $ab+ac+bc\le\frac{1}{3}$; b) $\sqrt{a+bc}\le\frac{a+1}{2}$; c) $\frac{b}{\sqrt{a+bc}}+\frac{c}{\sqrt{b+ac}}+\frac{a}{\sqrt{c+ab}}\ge\frac{3}{2}$.

PROBLEMA 3. Se consideră rombul $ABCD$ cu $m\left(\widehat{DAB}\right)=120^\circ$ şi $AC=6$ cm. De o parte şi de cealaltă parte a planului (ABC), se consideră punctele P şi Q astfel încât $PA\perp(ABC)$, $CQ\perp(ABC)$, $PA=CQ$ şi $DQ=6\sqrt{2}$ cm.

a) Să se determine măsura unghiului dintre dreptele CQ şi PB;

b) Să se arate că patrulaterul $PBQD$ este romb.

PROBLEMA 4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic, O centrul său şi punctele $M\in(AB)$, $N\in(AD)$, $P\in(A\,A')$. Notăm cu Q,R,S simetricele punctului O faţă de punctele M,N respectiv P. Ştiind că $OM\cap(ADA')=\{Q\}$, $ON\cap(ABB')=\{R\}$ şi $OP\cap(ABC)=\{S\}$, se cere:

a) să se demonstreze că punctele Q,R,S sunt necoliniare;

b) să se demonstreze că $(QRS)\parallel(A'BD)$ şi să se determine raportul ariilor triunghiurilor QRS şi $A'BD$.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

Clasa a IX – a

PROBLEMA 1. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Să se arate că dacă D este proiecţia punctului A pe BC, E este punctul de intersecţie al bisectoarei unghiului $\widehat{BAC}$ cu BC, iar M este mijlocul ipotenuzei BC, atunci:

a) $[AE$ este bisectoarea unghiului $\widehat{MAD}$;

b) $\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2\overrightarrow{AD}+\left(1-\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2\right)\overrightarrow{AM}$.

PROBLEMA 2. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_1=\dfrac{1}{4}$ şi

$$\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}=\frac{2}{n^2+2n},\quad \text{pentru } n\geq 1.$$

a) Să se determine termenul general al şirului;

b) Să se arate că $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k+1)\,x_k<1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

PROBLEMA 3. Să se rezolve ecuaţia $\left\{x+\dfrac{1}{6}\right\}+\left\{x+\dfrac{3}{6}\right\}+\left\{x+\dfrac{5}{6}\right\}=\dfrac{3\,(2x-1)}{2}$.

Notă. $\{a\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului a.

PROBLEMA 4. Să se arate că, dacă $a,\ b$ şi c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

Clasa a X – a

PROBLEMA 1. Să se arate că dacă u şi v sunt două numere complexe, astfel încât $|u| = |v|$ şi $2 \cdot |u+v| \geq |u+3v|$, atunci $u = v$.

PROBLEMA 2. Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}^*$, iar $a, b, c \in (0,1)$ sau $a, b, c \in (1, +\infty)$, atunci

$$\frac{1}{\log_a (bc^n)} + \frac{1}{\log_b (ca^n)} + \frac{1}{\log_c (ab^n)} \geq \frac{3}{n+1}.$$

PROBLEMA 3. Fie $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \{0\}$ şi $f : M \to M$ o funcţie bijectivă cu proprietatea că

$$f(x) + f^{-1}(x) = x, \quad \forall\, x \in M.$$

a) Să se arate că M este o mulţime simetrică şi că funcţia f este impară;

b) Să se dea un exemplu de funcţie cu aceste proprietăţi.

Notă. *O mulţime $M \subseteq R$ se numeşte simetrică, dacă are loc $x \in M \Leftrightarrow -x \in M$.*

PROBLEMA 4. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$, mijloacele M, N, P şi Q ale segmentelor AB, BC, CD, respectiv AD şi punctele E, F, G şi H situate pe segmentele AN, BP, CQ, respectiv DM, astfel încât $\frac{EA}{EN} = \frac{FB}{FP} = \frac{GC}{GQ} = \frac{HD}{HM}$.

a) Să se arate că $EFGH$ este paralelogram dacă şi numai dacă $ABCD$ este paralelogram;

b) Să se demonstreze că dacă diagonalele patrulaterului $ABCD$ sunt congruente şi perpendiculare, atunci $EG \perp FH$.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

Clasa a XI – a

PROBLEMA 1.

a) Să se determine valorile lui a şi b, astfel încât

$$\lim_{x\to\infty}\left(a\sqrt[3]{x^3+bx^2+a}+b\sqrt{x^2+ax+b}-5x\right)=5;$$

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2+2k+2}{k\,(k+1)\,(k+2)!}\right)^{(n+3)!}$.

PROBLEMA 2. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, definit prin $x_0>1$ şi $x_{n+1}=\dfrac{2x_n+1}{x_n+2}$, pentru $n\in\mathbb{N}$. Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{x_n}-1\right)$.

PROBLEMA 3. Să se rezolve în $M_2(\mathbb{R})$, ecuaţia matriceală $X^2=A$, unde $A=\begin{pmatrix} 7 & 10\\ 15 & 22\end{pmatrix}$.

PROBLEMA 4. Se consideră matricea $A\in M_2(\mathbb{R})$. Să se arate că dacă $\operatorname{tr} A^{2024}=1$ şi $\det\left(A^{2023}+A^{2022}+...+A+I_2\right)=0$, atunci $\det A=0$.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

Clasa a XII – a

PROBLEMA 1. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int \frac{2-\cos^2 x+\sin 2x}{1+e^{-x}+\sin^2 x}dx;$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \arcsin\left(\cos^{2023} x\right) dx.$

PROBLEMA 2. Fie G un grup cu 10 elemente, cu elementul neutru e. Să se arate că dacă există două elemente distincte $a, b \in G \setminus \{e\}$, astfel încât $a^2 = b^2 = e$, atunci grupul G nu este abelian.

PROBLEMA 3. Să se determine funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ pentru care mulţimea

$$G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & f(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R}^* \right\}$$

are o structură de grup abelian în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

PROBLEMA 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f. Să se arate ca nu există $a, b \in \mathbb{R}^*$, astfel încât

$$f(ax - bF(x)) = ax + b, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.