OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V – a

PROBLEMA 1. Să se demonstreze că:

a) numărul 13^{2023} se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte diferite;

b) numărul $a = 1 + 12 + 12^2 + ... + 12^{2024}$ se poate scrie ca o sumă de 2025 pătrate perfecte.

Barem de corectare.

a) Avem $13^{2023} = 13 \cdot 13^{2022} = (4 + 9) \cdot 13^{2022} = (2 \cdot 13^{1011})^2 + (3 \cdot 13^{1011})^2$ .... **(4p)**

b) Din $a = (1 + 12) + (12^2 + 12^3) + ... + (12^{2022} + 12^{2023}) + 12^{2024} = 13 + 13 \cdot 12^2 + ... + 13 \cdot 12^{2022} + 12^{2024} = (2^2 + 3^2) + (2^2 \cdot 12^2 + 3^2 \cdot 12^2) + ... + (2^2 \cdot 12^{2022} + 3^2 \cdot 12^{2022}) + (12^{1012})^2$, rezultă că a se poate scrie ca o sumă de 2025 pătrate perfecte .... **(3p)**

PROBLEMA 2. Se consideră numerele $x = 2023^{2n+1} + 2024^n + n$ şi $y = n + 2024^n$, unde n este un număr natural nenul.

a) Să se determine ultima cifră a lui x, ştiind că $n = 2024$;

b) Să se demonstreze că dacă ultima cifră a lui x este 5, atunci numărul y nu este pătrat perfect.

Barem de corectare.

a) $\mathrm{u}(x) = \mathrm{u}(2023^{4 \cdot 1012+1} + 2024^{2 \cdot 1012} + 4) = \mathrm{u}(3 + 6 + 4) = 3$ .... **(4p)**

b) Dacă $\mathrm{u}(x) = 5$, atunci numărul x este impar, de unde rezultă că n este par. Dacă $n = 2k$, atunci $\mathrm{u}(x) = \mathrm{u}\left(2023^{4k+1} + y\right) = \mathrm{u}(3 + y)$. Dar, cum $\mathrm{u}(x) = 5$, rezultă că $\mathrm{u}(y) = 2$.. **(3p)**

PROBLEMA 3. Pe o tablă sunt scrise toate numerele de la 1 la 2024. Victor calculează suma S şi produsul P al tuturor numerelor de pe tablă.

a) Care este restul împărţirii numărului $S + P$ la 2024;

b) După ce şterge unul dintre numere, Victor recalculează suma S şi produsul P al numerelor rămase. Să se afle numărul şters de pe tablă, ştiind că restul împărţirii numărului $S + P$ la 2024 este 2023.

Barem de corectare.

a) $S+P = (2024 \cdot 2025) : 2 + (1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2023 \cdot 2024) = 1012 \cdot (2024+1) + (1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2023) \cdot 2024 = (1012 + 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2023) \cdot 2024 + 1012$ .... **(4p)**

b) Deoarece $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, indiferent care este numărul şters, P se împarte exact la 2024. Astfel restul împărţirii numărului $S+P$ la 2024 este egal cu restul împărţirii numărului S la 2024. Dacă n este numărul şters, atunci

$$S = 2025 \cdot 1012 - n = (2024+1) \cdot 1012 - n = \begin{cases} 2024 \cdot 1012 + (1012 - n) \\ 2024 \cdot 1011 + (3036 - n) \end{cases}$$

Aşadar, pentru ca restul împărţirii numărului S la 2024 să fie 2023, trebuie ca $3036 - n = 2023 \Leftrightarrow n = 1013$ .... **(3p)**

PROBLEMA 4. Câte numere naturale n au proprietatea că atât suma cifrelor cât şi produsul cifrelor acestuia sunt egale cu 12?

Barem de corectare. Deoarece $12 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, avem cazurile:

- pentru $12 = 6 \cdot 2$, deoarece $12 = 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6+2+1+1+1+1$, ... **(1p)**

  numerele căutate sunt de 6 cifre, şi se obţin permutând în toate modurile posibile cifrele $6, 2, 1, 1, 1, 1$; Astfel, se obţin $6 \cdot 5 = 30$ de numere; .... **(1p)**

- pentru $12 = 4 \cdot 3$, deoarece $12 = 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4+3+1+1+1+1+1$, ... **(1p)**

  numerele căutate sunt de 7 cifre, şi se obţin permutând în toate modurile posibile cifrele $4, 3, 1, 1, 1, 1, 1$; Astfel, se obţin $7 \cdot 6 = 42$ de numere; .... **(1p)**

- pentru $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, deoarece $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2+2+3+1+1+1+1+1$, **(1p)**

  numerele căutate sunt de 8 cifre, şi se obţin permutând în toate modurile posibile cifrele $2, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 1$; Astfel, se obţin $(1+2+3+4+5+6+7) \cdot 6 = 168$ de numere; .... **(1p)**

Aşadar, sunt $30 + 42 + 168 = 240$ astfel de numere. .... **(1p)**

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI – a

PROBLEMA 1. Să se determine numerele naturale nenule n şi r, ştiind că numerele 326, 420, 485 şi 579 împărţite la n dau resturile r, $2r$, $3r$ respectiv $4r$.

Barem de corectare. Din teorema împarţirii cu rest, există numerele naturale q_1, q_2, q_3 şi q_4, astfel încât $4r < n$ şi $326 = n \cdot q_1 + r,\ 420 = n \cdot q_2 + 2r,\ 485 = n \cdot q_3 + 3r,\ 579 = n \cdot q_4 + 4r$ (**4p**)

De aici, obţinem că $\begin{cases} 65 = n(q_3 - q_2) + r \\ 94 = n(q_4 - q_3) + r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \mid 65 - r \\ n \mid 94 - r \end{cases} \Rightarrow n \mid 29$ .... (**2p**)

Aşadar, $n = 29$ (cazul $n = 1$ nu convine), de unde se obţine că $r = 7$. .... (**1p**)

PROBLEMA 2. Să se arate că:

a) numărul $n = 1 + 2^5 + 2^{10} + ... + 2^{2025}$ este divizibil cu 33;

b) fracţia $\dfrac{4^{2^{2025}-1} + 2^{2^{2024}} + 1}{n}$ este reductibilă.

Barem de corectare.

a) Deoarece $n = (1 + 2^5) + (1 + 2^5) \cdot 2^{10} + ... + (1 + 2^5) \cdot 2^{2020} = 33 + 33 \cdot 2^{10} + ... + 33 \cdot 2^{2020}$, rezultă că n este divizibil cu 33.. (**4p**)

b) Cum $a = 4^{2^{2025}-1}$ şi $b = 2^{2^{2024}}$ sunt două pătrate perfecte ce nu se divid cu 3, numerele a şi b sunt de forma $M_3 + 1$, de unde rezultă că numărul $a + b + 1$ se divide cu 3.......... (**2p**)

Aşadar, cum şi numărul n se divide cu 3, fracţia $\dfrac{a+b+1}{n}$ este reductibilă........... (**1p**)

PROBLEMA 3. Câte perechi de numere naturale x şi y există, astfel încât $(x, y) = 14$ şi $[x, y] = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 10$?

Notă. (x, y) reprezintă cel mai mare divizor comun, iar $[x, y]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor x şi y.

Barem de corectare. Deoarece $(x, y) = 14$, există două numere naturale u şi v cu $(u, v) = 1$, astfel încât $x = 14 \cdot u$ şi $y = 14 \cdot v$.. (**3p**)

Astfel, din $xy = (x, y) \cdot [x, y]$, obţinem că $u \cdot v = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2$............................... (**2p**)

Cum $(u, v) = 1$, valorile posibile ale lui u, sunt $1,\ 2^7,\ 3^4,\ 5^2,\ 2^7 \cdot 3^4,\ 2^7 \cdot 5^2,\ 3^4 \cdot 5^2,\ 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, adică sunt 8 posibilităţi.. (**2p**)

PROBLEMA 4. Fie unghiul alungit $\widehat{AOD}$. De aceeaşi parte a dreptei AD, considerăm punctele B şi C, astfel încât măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ şi $\widehat{COD}$ să fie exprimate în grade sexagesimale prin numere naturale direct proporţionale cu trei numere naturale consecutive şi $\mathrm{m}\left(\widehat{AOB}\right) < \mathrm{m}\left(\widehat{BOC}\right) < \mathrm{m}\left(\widehat{COD}\right)$.

a) Să se demonstreze că $\mathrm{m}\left(\widehat{BOC}\right) = 60\,^\circ$;

b) Să se determine numărul de soluţii ale problemei;

c) De aceeaşi parte a dreptei AD ca şi punctul B, se consideră punctul E, astfel încât $OE \perp OC$; Să se calculeze măsura unghiului $\widehat{EOF}$, ştiind că $(OF$ este bisectoarea unghiului $\widehat{COD}$ şi că $\mathrm{m}\left(\widehat{AOB}\right) = 40\,^\circ$.

Barem de corectare.

a) Dacă măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ şi $\widehat{COD}$ sunt direct proporţionale cu numerele $n-1, n$ şi $n+1$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci $\dfrac{\mathrm{m}\left(\widehat{AOB}\right)}{n-1} = \dfrac{\mathrm{m}\left(\widehat{BOC}\right)}{n} = \dfrac{\mathrm{m}\left(\widehat{COD}\right)}{n+1}$ $= \dfrac{\mathrm{m}\left(\widehat{AOB}\right) + \mathrm{m}\left(\widehat{BOC}\right) + \mathrm{m}\left(\widehat{COD}\right)}{3n} = \dfrac{60\,^\circ}{n}$ de unde obţinem că $\mathrm{m}\left(\widehat{BOC}\right) = 60\,^\circ$ (**3p**)

b) Din $n \cdot \mathrm{m}\left(\widehat{AOB}\right) = (n-1) \cdot \mathrm{m}\left(\widehat{BOC}\right)$, cum numerele n şi $n-1$ sunt relativ prime, rezultă că $n \mid 60$. Cum $n \neq 1$, n are 11 valori posibile. . . . . (**2p**)

c) Dacă $\mathrm{m}\left(\widehat{AOB}\right) = 40\,^\circ$, atunci $\mathrm{m}\left(\widehat{COD}\right) = 80\,^\circ$ şi $\mathrm{m}\left(\widehat{EOF}\right) = \mathrm{m}\left(\widehat{EOC}\right) + \mathrm{m}\left(\widehat{COF}\right) = 90\,^\circ + 40\,^\circ = 130\,^\circ$. . . . . (**2p**)

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII – a

PROBLEMA 1.

a) Să se determine numărul natural $n \geq 2$, pentru care

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3}}+...+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{(n-1)\cdot n}}=1-\frac{1}{\sqrt{2023}};$$

b) Să se determine cel mai mic număr natural x, pentru care

$$\frac{|x-\sqrt{2}|}{x-\sqrt{2}}+\frac{|x-\sqrt{3}|}{x-\sqrt{3}}+...+\frac{|x-\sqrt{2024}|}{x-\sqrt{2024}}=n,$$

unde n este numărul natural determinat la punctul a).

Barem de corectare.

a) Folosind egalitatea $\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k\cdot(k+1)}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$, relaţia din enunţ devine $1-\frac{1}{\sqrt{n}}=1-\frac{1}{\sqrt{2023}}$, de unde rezultă că $n=2023$; .... **(4p)**

b) Deoarece $\frac{|a|}{a}=\begin{cases}-1, & a<0\\ +1, & a>0\end{cases}$, iar suma din membrul stâng are 2023 de termeni, egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\frac{|x-\sqrt{2}|}{x-\sqrt{2}}=\frac{|x-\sqrt{3}|}{x-\sqrt{3}}=...=\frac{|x-\sqrt{2024}|}{x-\sqrt{2024}}=1$. Aşadar $x>\sqrt{2024}$, iar cel mai mic număr natural care verifică relaţia dată, este 45. .... **(3p)**

PROBLEMA 2. Să se determine numerele reale x care satisfac egalitatea $\{x\}-\{2024x\}=x$, unde $\{a\}$ este partea fracţionară a lui a.

Barem de corectare.

Relaţia dată se scrie echivalent, $-\{2024x\}=x-\{x\} \Leftrightarrow -\{2024x\}=[x]$ .... **(2p)**

Dar, cum $0\leq\{2024x\}<1$, iar $[x]\in\mathbb{Z}$, obţinem că $\{2024x\}=[x]=0$ .... **(2p)**

Aşadar, $2024x\in\mathbb{Z}$ şi $0\leq x<1$ ...... **(2p)** de unde $x\in\left\{\frac{k}{2024}\,\middle|\,k=0,1,2,...,2023\right\}$ ...... **(1p)**

PROBLEMA 3. Fie triunghiul ABC, M mijlocul laturii BC şi punctele D şi E pe latura AB, F şi G pe latura AC, astfel încât $DM \parallel CE$ şi $MF \parallel BG$. Notăm cu N şi P mijloacele segmentelor DF, respectiv EG. Să se demonstreze că punctele M, N şi P sunt coliniare.

Barem de corectare. Deoarece MD şi MF sunt linii mijlocii în triunghiurile BEC, respectiv CBG, rezultă că $BD = DE$ şi $CF = FG$. .... **(3p)**

Din faptul că MD şi PF sunt linii mijlocii în triunghiurile BEC, respectiv GEC, rezultă că $MD \parallel PF$ şi $MD = PF = \dfrac{EC}{2}$. .... **(2p)**

Aşadar, $MDPF$ este un paralelogram, de unde, deoarece N este mijlocul diagonalei DF, se obţine că punctele M, N şi P sunt coliniare. .... **(2p)**

PROBLEMA 4. Considerăm pătratul $ABCD$, punctele $M \in (BC)$ şi $N \in (CD)$ astfel încât $BM = CN$, şi fie $AC \cap BD = \{O\}$, $AM \cap BN = \{P\}$, $AC \cap BN = \{Q\}$, $AM \cap BD = \{H\}$.

a) Să se arate că H este ortocentrul triunghiului ABQ;

b) Să se calculeze măsura unghiului $\widehat{OPA}$.

Barem de corectare.

a) Din congruenţa triunghiurilor ABM şi BCN, rezultă că $\widehat{BAM} \equiv \widehat{CBN}$. .... **(2p)**

Astfel, deoarece $\mathrm{m}\left(\widehat{PAB}\right) + \mathrm{m}\left(\widehat{PBA}\right) = \mathrm{m}\left(\widehat{CBN}\right) + \mathrm{m}\left(\widehat{NBA}\right) = 90^\circ$, rezultă că $\mathrm{m}\left(\widehat{APB}\right) = 90^\circ$. .... **(2p)**

Cum $AC \perp BD$, obţinem că AP şi BO sunt înalţimi în triunghiul ABQ, de unde rezultă că H este ortocentrul triunghiului ABQ; .... **(1p)**

b) Deoarece $\mathrm{m}\left(\widehat{AOB}\right) = \mathrm{m}\left(\widehat{APB}\right) = 90^\circ$, rezultă că patrulaterul $ABPO$ este inscriptibil, de unde $\mathrm{m}\left(\widehat{OPA}\right) = \mathrm{m}\left(\widehat{OBA}\right) = 45^\circ$. .... **(2p)**

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII – a

PROBLEMA 1.

a) Ştiind că numerele a şi b verifică relaţia $a^2 + b^2 - 18a - 14b + 130 = 0$, să se găsească o pereche de numere naturale nenule (x, y), cu proprietatea $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{ab}$;

b) Să se determiine toate numerele prime p, pentru care există două numere naturale nenule x şi y, astfel încât $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{21p}$.

Barem de corectare.

a) Din $a^2 + b^2 - 18a - 14b + 130 = 0 \Leftrightarrow (a-9)^2 + (b-7)^2 = 0$, se obţine $(a, b) = (9, 7)$.**(4p)**

De exemplu, pererchea $(x, y) = (7, 28)$ verifică relaţia $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{63}$...............**(1p)**

b) Dacă $p = 7$, atunci $(x, y) = (3, 108)$ verifică relaţia $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{21 \cdot 7}$. Aşadar, problema are soluţie dacă $p = 3$ sau $p = 7$.

Dacă $p \notin \{3, 7\}$, atunci avem $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{21p} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{21p}} + \sqrt{\frac{y}{21p}} = 1$, de unde rezultă că $\sqrt{\frac{x}{21p}} = \frac{\sqrt{21px}}{21p} \in \mathbb{Q}$ şi $\sqrt{\frac{y}{21p}} = \frac{\sqrt{21py}}{21p} \in \mathbb{Q}$..**(1p)**

Aşadar, există două numere naturale nenule a şi b, astfel încât $x = 21p \cdot a^2$ şi $y = 21p \cdot b^2$. Din $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{21p}$ rezultă că $a + b = 1$, ceea ce este imposibil.....................**(1p)**

PROBLEMA 2. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, astfel încât $a + b + c = 1$, atunci:

a) $ab + ac + bc \le \frac{1}{3}$; b) $\sqrt{a + bc} \le \frac{a+1}{2}$; c) $\frac{b}{\sqrt{a+bc}} + \frac{c}{\sqrt{b+ac}} + \frac{a}{\sqrt{c+ab}} \ge \frac{3}{2}$.

Barem de corectare.

a) $3(ab + ac + bc) \le (a + b + c)^2 = 1 \Rightarrow ab + ac + bc \le \frac{1}{3}$..............................**(2p)**

b) $\sqrt{a + bc} = \sqrt{1 - b - c + bc} = \sqrt{(1-b)(1-c)} \le \frac{2 - b - c}{2} = \frac{a+1}{2}$ ....**(3p)**

c) Folosind inegalităţile precedente şi inegalitatea lui Titu Andreescu, avem

$$\frac{b}{\sqrt{a+bc}} + \frac{c}{\sqrt{b+ac}} + \frac{a}{\sqrt{c+ab}} \ge \frac{2b}{a+1} + \frac{2c}{b+1} + \frac{2a}{c+1} = 2\left(\frac{b^2}{ab+b} + \frac{c^2}{bc+c} + \frac{a^2}{ac+a}\right)$$

$$\ge \frac{2(a+b+c)^2}{ab+ac+bc+a+b+c} = \frac{2}{ab+ac+bc+1} \ge \frac{2}{\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{2}$$ .... **(2p)**

PROBLEMA 3. Se consideră rombul $ABCD$ cu $\mathrm{m}\left(\widehat{DAB}\right) = 120\,^{\circ}$ şi $AC = 6$ cm. De o parte şi de cealaltă parte a planului (ABC), se consideră punctele P şi Q astfel încât $PA \perp (ABC)$, $CQ \perp (ABC)$, $PA = CQ$ şi $DQ = 6\sqrt{2}$ cm.

a) Să se determine măsura unghiului dintre dreptele CQ şi PB;

b) Să se arate că patrulaterul $PBQD$ este romb.

Barem de corectare.

a) Din ipoteză, rezultă că triunghiurile ABC şi ADC sunt triunghiuri echilaterale cu latura de 6 cm, iar $PA = CQ = \sqrt{DQ^2 - DC^2} = 6$ cm. Aşadar triunghiul ABP este dreptunghic isoscel. Deoarece $PA \parallel CQ$, avem $\mathrm{m}\left(\widehat{CQ, PB}\right) = \mathrm{m}\left(\widehat{APB}\right) = 45\,^{\circ}$. . . . . **(4p)**

b) Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Deoarece $PA \parallel CQ$, $PA = CQ$ rezultă că $PAQC$ este paralelogram, de unde obţinem că diagonalele AC şi PQ se înjumătăţesc în O. Dar, cum O este şi mijlocul lui BD, obţinem că BD şi PQ se înjumătăţesc în O, de unde $PBQD$ este paralelogram. Cum $DP = PB = 6\sqrt{2}$ cm, se obţine că $PBQD$ este romb.**(3p)**

PROBLEMA 4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic, O centrul său şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AD)$, $P \in (A\ A')$. Notăm cu Q, R, S simetricele punctului O faţă de punctele M, N respectiv P. Ştiind că $OM \cap (ADA') = \{Q\}$, $ON \cap (ABB') = \{R\}$ şi $OP \cap (ABC) = \{S\}$, se cere:

a) să se demonstreze că punctele Q, R, S sunt necoliniare;

b) să se demonstreze că $(QRS) \parallel (A'BD)$ şi să se determine raportul ariilor triunghiurilor QRS şi $A'BD$.

Barem de corectare.

a) Deoarece $OM \cap AD' = \{Q\}$, $ON \cap AB' = \{R\}$ şi $OP \cap AC = \{S\}$, ... **(1p)**
aplicând teorema lui Menelaus în triunghiurile QOD', ROB' şi SOC, obţinem că $\dfrac{QA}{AD'} = \dfrac{RA}{AB'} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{1}{2}$. Aşadar, punctele Q, R şi S sunt simetricele faţă de punctul A a mijloacelor Q', R' şi S' ale segmentelor AD', AB' respectiv AC. Cum punctele Q', R' şi S' nu sunt coliniare, rezultă că nici punctele Q, R, S nu sunt coliniare. . . . .**(3p)**

b) Deoarece planele $(A'BD)$ şi $(Q'R'S')$ coincid, cum $(QRS) \parallel (Q'R'S')$, rezultă că $(QRS) \parallel (A'BD)$. Cum triunghiurile QRS şi $A'BD$ sunt asemenea, având raportul de asemănare $\dfrac{1}{2}$, rezultă că raportul ariilor triunghiurilor QRS şi $A'BD$ este $\dfrac{1}{4}$. . . . .**(3p)**

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX – a

PROBLEMA 1. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Să se arate că dacă D este proiecţia punctului A pe BC, E este punctul de intersecţie al bisectoarei unghiului $\widehat{BAC}$ cu BC, iar M este mijlocul ipotenuzei BC, atunci:

a) $[AE$ este bisectoarea unghiului $\widehat{MAD}$;

b) $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 \overrightarrow{AD} + \left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right) \overrightarrow{AM}$.

Barem de corectare.

a) Deoarece $\mathrm{m}\left(\widehat{DAB}\right) = 90^\circ - \mathrm{m}\left(\widehat{B}\right) = \mathrm{m}\left(\widehat{C}\right) = \mathrm{m}\left(\widehat{CAM}\right)$, şi $[AE$ este bisectoarea unghiului $\widehat{A}$, rezultă că $[AE$ este şi bisectoarea unghiului $\widehat{MAD}$. .... **(2p)**

b) Aşadar, $\frac{ED}{EM} = \frac{AD}{AM} = \frac{2bc}{a^2} = k$, ... **(2p)** de unde

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AD} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AM} = \frac{a^2}{a^2+2bc}\overrightarrow{AD} + \frac{2bc}{a^2+2bc}\overrightarrow{AM} \quad \textbf{(2p)}$$

$$= \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 \overrightarrow{AD} + \left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right) \overrightarrow{AM} \quad \textbf{(1p)}$$

PROBLEMA 2. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_1 = \frac{1}{4}$ şi

$$\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} = \frac{2}{n^2+2n}, \quad \text{pentru } n \geq 1.$$

a) Să se determine termenul general al şirului;

b) Să se arate că $\sum_{k=1}^{n} (2k+1)\, x_k < 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Barem de corectare.

a) Se demonstrează prin inducţie că $x_n = \frac{1}{n^2 (n+1)^2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;............. **(4p)**

b) Folosind punctul a), avem $\sum_{k=1}^{n} (2k+1)\, x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2 (k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1$. .... **(3p)**

PROBLEMA 3. Să se rezolve ecuaţia $\left\{x+\frac{1}{6}\right\}+\left\{x+\frac{3}{6}\right\}+\left\{x+\frac{5}{6}\right\}=\frac{3\left(2x-1\right)}{2}$.

Notă. $\{a\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului a.

Barem de corectare. Ecuaţia se scrie echivalent $x+\frac{1}{6}+x+\frac{3}{6}+x+\frac{5}{6}-\left[x+\frac{1}{6}\right]-\left[x+\frac{3}{6}\right]-\left[x+\frac{5}{6}\right]=3x-\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left[x+\frac{1}{6}\right]+\left[x+\frac{3}{6}\right]+\left[x+\frac{5}{6}\right]=3$ .... **(4p)**

Dar, cum din identitatea lui Hermite, $\left[x+\frac{1}{6}\right]+\left[x+\frac{3}{6}\right]+\left[x+\frac{5}{6}\right]=\left[3x+\frac{1}{2}\right]$, ... **(2p)**

ecuaţia devine $\left[3x+\frac{1}{2}\right]=3$, de unde $x\in\left[\frac{5}{6},\frac{7}{6}\right)$ .... **(1p)**

PROBLEMA 4. Să se arate că, dacă a, b şi c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

Barem de corectare. Deoarece a, b şi c sunt lungimile laturilor unui triunghi, numerele $x=b+c-a$, $y=a+c-b$ şi $z=a+b-c$ sunt pozitive. .... **(1p)**

Dacă notăm cu E expresia din stânga, atunci

$$E=\frac{1}{2}\left(\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}\right)$$ .... **(3p)**

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\right)\geq 3$$ .... **(3p)**

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 10. 02. 2024
BAREM DE CORECTARE - Clasa a X – a

PROBLEMA 1. Să se arate că dacă u şi v sunt două numere complexe, astfel încât $|u| = |v|$ şi $2 \cdot |u+v| \geq |u+3v|$, atunci $u = v$.

Barem de corectare. Evident, $u = 0 \Leftrightarrow v = 0$. .... **(1p)**
Dacă $u, v \in \mathbb{C}^*$, atunci dacă notăm $z = \dfrac{u}{v}$, relaţile din enunţ se scriu $|z| = 1$ şi $2 \cdot |z+1| \geq |z+3|$.
Avem $2 \cdot |z+1| \geq |z+3| \Leftrightarrow 4 \cdot |z+1|^2 \geq |z+3|^2$ .... **(2p)**
sau, echivalent $4 \cdot (z+1)\left(\overline{z+1}\right) \geq (z+3)\left(\overline{z+3}\right) \Leftrightarrow 4\left(|z|^2 + (z+\overline{z}) + 1\right) \geq |z|^2 + 3(z+\overline{z}) + 9 \Leftrightarrow$
$4((z+\overline{z}) + 2) \geq 3(z+\overline{z}) + 10 \Leftrightarrow z + \overline{z} \geq 2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z \geq 1$ .... **(3p)**
de unde, deoarece $|z| = 1$, se obţine că $z = 1$, adică $u = v$. .... **(1p)**

PROBLEMA 2. Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}^*$, iar $a, b, c \in (0,1)$ sau $a, b, c \in (1, +\infty)$, atunci

$$\frac{1}{\log_a (bc^n)} + \frac{1}{\log_b (ca^n)} + \frac{1}{\log_c (ab^n)} \geq \frac{3}{n+1}.$$

Barem de corectare. Notăm $A = \log_x a$, $B = \log_x b$, $C = \log_x c$, unde $x \in (0,1)$, dacă $a, b, c \in (0,1)$ sau $x \in (1, +\infty)$, dacă $a, b, c \in (1, +\infty)$. Astfel $A, B, C > 0$. .... **(1p)**
Dacă notăm $E = \dfrac{1}{\log_a bc^n} + \dfrac{1}{\log_b ca^n} + \dfrac{1}{\log_c ab^n}$, atunci din inegalitatea lui Titu Andreescu obţinem

$$E = \frac{A}{nC+B} + \frac{B}{nA+C} + \frac{C}{nB+A} \quad \text{..........} \quad \textbf{(3p)}$$

$$= \frac{A^2}{nAC+AB} + \frac{B^2}{nAB+BC} + \frac{C^2}{nBC+AC} \geq \frac{(A+B+C)^2}{(n+1)(AB+AC+BC)} \quad \text{..........} \quad \textbf{(2p)}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{A^2+B^2+C^2}{AB+AC+BC} + 2\right) \geq \frac{3}{n+1} \quad \text{..........} \quad \textbf{(1p)}$$

PROBLEMA 3. Fie $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \{0\}$ şi $f : M \to M$ o funcţie bijectivă cu proprietatea că

$$f(x) + f^{-1}(x) = x, \quad \forall\, x \in M.$$

a) Să se arate că M este o mulţime simetrică şi că funcţia f este impară;

b) Să se dea un exemplu de funcţie cu aceste proprietăţi.

Notă. *O mulţime $M \subseteq R$ se numeşte simetrică, dacă are loc $x \in M \Leftrightarrow -x \in M.x$*

Barem de corectare.

a) Fie $x \in M$. Din relaţia dată, înlocuind x cu $f(x)$, rezultă că $(f \circ f)(x) + x = f(x)$. . **(2p)**

Dar, cum $f(x) = x - f^{-1}(x)$, se obţine că $(f \circ f)(x) + f^{-1}(x) = 0 \Rightarrow (f \circ f \circ f)(x) + x = 0 \Rightarrow -x = (f \circ f \circ f)(x) \in M$ . . . . **(2p)**

Din $(f \circ f \circ f)(x) = -x$ avem $(f \circ f \circ f \circ f)(x) = -f(x) \Rightarrow f((f \circ f \circ f)(x)) = -f(x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ . . . . **(2p)**

b) De exemplu, funcţia $f : M \to M$, unde $M = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$, definită prin

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	1	-3	0	3	-1	2

satisface cerinţele problemei . . . . **(1p)**

PROBLEMA 4. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$, mijloacele M, N, P şi Q ale segmentelor AB, BC, CD, respectiv AD şi punctele E, F, G şi H situate pe segmentele AN, BP, CQ, respectiv DM, astfel încât $\frac{EA}{EN} = \frac{FB}{FP} = \frac{GC}{GQ} = \frac{HD}{HM}$;

a) Să se arate că $EFGH$ este paralelogram dacă şi numai dacă $ABCD$ este paralelogram;

b) Să se demonstreze că dacă diagonalele patrulaterului $ABCD$ sunt congruente şi perpendiculare, atunci $EG \perp FH$.

Barem de corectare. Fie z_A afixul punctului A, z_B afixul punctului B, ş.a.m.d.
Cum M, N, P şi Q sunt mijloacele segmentelor AB, BC, CD, respectiv AD, avem $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$, $z_N = \frac{z_B + z_C}{2}$, $z_P = \frac{z_C + z_D}{2}$, $z_Q = \frac{z_A + z_D}{2}$. . . . . **(2p)**
Dacă notăm $\frac{EA}{EN} = \frac{FB}{FP} = \frac{GC}{GQ} = \frac{HD}{HM} = k$, atunci $z_E = \frac{z_A + k \cdot z_N}{k+1} = \frac{2z_A + k \cdot (z_B + z_C)}{2(k+1)}$, respectiv $z_F = \frac{2z_B + k \cdot (z_C + z_D)}{2(k+1)}$, $z_G = \frac{2z_C + k \cdot (z_A + z_D)}{2(k+1)}$ şi $z_H = \frac{2z_D + k \cdot (z_A + z_B)}{2(k+1)}$.**(2p)**

a) Folosind aceste relaţii, se demonstrază echivalenţa $z_E + z_G = z_F + z_H \Leftrightarrow z_A + z_C = z_B + z_D$, adică $EFGH$ este paralelogram dacă şi numai dacă $ABCD$ este paralelogram . . . . **(1p)**

b) Dacă diagonalele patrulaterului $ABCD$ sunt congruente şi perpendiculare, atunci $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = \pm i$, de unde se obţine că $\frac{z_E - z_G}{z_F - z_H} = \pm i$, adică $EG \perp FH$. . . . . **(2p)**.

---

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI – a

PROBLEMA 1.

a) Să se determine valorile lui a şi b, astfel încât

$$\lim_{x\to\infty}\left(a\sqrt[3]{x^3+bx^2+a}+b\sqrt{x^2+ax+b}-5x\right)=5;$$

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2k+2}{k\,(k+1)\,(k+2)!}\right)^{(n+3)!}$

Barem de corectare.

a) Fie $L=\lim\limits_{x\to\infty}\left(a\sqrt[3]{x^3+bx^2+a}+b\sqrt{x^2+ax+b}-5x\right)$.

Deoarece pentru $a+b\neq 5$, $|L|=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left|a\sqrt[3]{1+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^3}}+b\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}-5\right|=+\infty$, pentru ca limita să fie finită este necesar ca $a+b=5$. .... **(2p)**

Astfel, $L=\lim_{x\to\infty}\left(a\left(\sqrt[3]{x^3+bx^2+a}-x\right)+b\left(\sqrt{x^2+ax+b}-x\right)\right)=a\cdot\frac{b}{3}+b\cdot\frac{a}{2}=\frac{5ab}{6}$, de unde $L=5\Leftrightarrow a+b=5$ şi $ab=6\Leftrightarrow(a,b)=(3,2)$ sau $(a,b)=(2,3)$ .... **(2p)**

b) Deoarece

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2k+2}{k\,(k+1)\,(k+2)!}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k\,(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)\,(k+2)!}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)\,(n+2)!},$$ .. **(2p)**

limita din enunţ este $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{(n+1)\,(n+2)!}\right)^{-(n+1)(n+2)!}\right]^{\frac{-(n+3)!}{(n+1)\,(n+2)!}}=e^{-1}$. **(1p)**

PROBLEMA 2. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, definit prin $x_0>1$ şi $x_{n+1}=\frac{2x_n+1}{x_n+2}$, pentru $n\in\mathbb{N}$. Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt{x_n}-1\right)$.

Barem de corectare. Deoarece $x_{n+1}-1=\frac{x_n-1}{x_n+2}$, inductiv se demonstrează că $x_n>1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$. .... **(2p)**

Astfel, cum $x_{n+1}-x_n=\frac{(1-x_n)\,(1+x_n)}{x_n+2}<0$, şirul este descrescător. .... **(2p)**

Aşadar, şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, se obtine că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. .... **(1p)**

Cum $x_{k+1} - 1 = \dfrac{x_k - 1}{x_k + 2} < \dfrac{x_k - 1}{3}$, avem $x_n - 1 < \dfrac{x_{n-1} - 1}{3} < \dfrac{x_{n-2} - 1}{3^2} < ... < \dfrac{x_0 - 1}{3^n}$, de unde $\left|n^2\left(\sqrt{x_n} - 1\right)\right| = \dfrac{n^2}{\sqrt{x_n} + 1}(x_n - 1) < \dfrac{n^2}{\sqrt{x_n} + 1}\dfrac{x_0 - 1}{3^n} = \dfrac{x_0 - 1}{\sqrt{x_n} + 1} \cdot \dfrac{n^2}{3^n} \to 0$. Aşadar, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{x_n} - 1\right) = 0$. . . . . **(2p)**

PROBLEMA 3. Să se rezolve în $M_2(\mathbb{R})$, ecuaţia matriceală $X^2 = A$, unde $A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$.

Barem de corectare. Din teorema lui Hamilton-Cayley, $X^2 = \operatorname{tr} X \cdot X - \det X \cdot I_2$, iar din $\det X^2 = \det A = 4$, obţinem că că $\det X = \pm 2$. . . . . **(2p)**
Astfel, $X^2 = \operatorname{tr} X \cdot X \pm 2I_2$, iar ecuaţia devine $\operatorname{tr} X \cdot X = A \pm 2I_2$, de unde $X = \dfrac{1}{\operatorname{tr} X}(A \pm 2I_2)$.
Urma lui X se determină din $(\operatorname{tr} X)^2 = \operatorname{tr}(\operatorname{tr} X \cdot X) = \operatorname{tr}(A \pm 2I_2) = \operatorname{tr} A \pm 2 \operatorname{tr} I_2$. . . . . **(3p)**
Aşadar,

- Dacă $\det X = 2$, atunci $\operatorname{tr} X = \pm\sqrt{33}$, de unde $X = \pm\dfrac{1}{\sqrt{33}}\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$ . . . . **(1p)**
- Dacă $\det X = -2$, atunci $\operatorname{tr} X = \pm 5$, de unde $X = \pm\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . . . . **(1p)**

PROBLEMA 4. Se consideră matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$. Să se arate că dacă $\operatorname{tr} A^{2024} = 1$ şi $\det(A^{2023} + A^{2022} + ... + A + I_2) = 0$, atunci $\det A = 0$.

Barem de corectare.
Dacă $B = A^{2024}$, atunci, din $B - I_2 = A^{2024} - I_2 = (A - I_2)(A^{2023} + A^{2022} + ... + A + I_2)$ rezultă că $\det(B - I_2) = 0$. . . . . **(3p)**
Fie acum $f(x) = \det(B - x \cdot I_2) = x^2 - \operatorname{tr} B \cdot x + \det B = x^2 - x + \det B$. . . . . **(3p)**
Cum $f(1) = \det(B - I_2) = 0$, obţinem că $\det B = 0 \Rightarrow \det A = 0$. . . . . **(1p)**

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10. 02. 2024

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII – a

PROBLEMA 1. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int \frac{2-\cos^2 x+\sin 2x}{1+e^{-x}+\sin^2 x}dx;$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \arcsin\left(\cos^{2023} x\right)dx.$

Barem de corectare. Avem:

a) $\displaystyle\int \frac{2-\cos^2 x+\sin 2x}{1+e^{-x}+\sin^2 x}dx=\int\left(1+\frac{-e^{-x}+\sin 2x}{1+e^{-x}+\sin^2 x}\right)dx=x+\ln\left(1+e^{-x}+\sin^2 x\right)+C$ (**3p**)

b) Dacă $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\arcsin\left(\cos^{2023} x\right)dx$, prin substituţia $\frac{\pi}{2}-x=t$, se obţine că $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\arcsin\left(\sin^{2023} x\right)dx$. . . . . (**3p**)

Dar, cum funcţia $f(x)=\arcsin\left(\sin^{2023} x\right)$ este impară, rezultă că $I=0$. . . . . (**1p**)

PROBLEMA 2. Fie G un grup cu 10 elemente, cu elementul neutru e. Să se arate că dacă există două elemente distincte $a,b\in G\setminus\{e\}$, astfel încât $a^2=b^2=e$, atunci grupul G nu este abelian.

Barem de corectare. Deoarece $a\neq b$ şi $a^2=b^2=e$, rezultă că $ab\notin\{e,a,b\}$. Aşadar, mulţimea $H=\{e,a,b,ab\}$ are 4 elemente. . . . . (**4p**)

Dacă grupul G ar fi comutativ, atunci multimea H ar fi un subgrup al lui G, ... (**2p**)

ceea ce contrazice teorema lui Lagrange, deoarece $4\nmid 10$. . . . . (**1p**)

PROBLEMA 3. Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ pentru care mulţimea

$$G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix} x & f(x)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{R}^*\right\}$$

are o structură de grup abelian în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

Barem de corectare.

Deoarece, pentru orice elemente $x,y\in\mathbb{R}^*$, $A(x)\cdot A(y)=A(y)\cdot A(x)$, obţinem că

$$x\cdot f(y)+f(x)=y\cdot f(x)+f(y)\Leftrightarrow(y-1)\cdot f(x)=(x-1)\cdot f(y).$$

Aşadar, pentru $y=2$ se obţine că $f(x)=a(x-1)$, unde $a\in\mathbb{R}$. . . . . (**4p**)

Astfel,

$$A(x)=\begin{pmatrix} x & a(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^*$$

şi $A(x)\cdot A(y)=A(x\cdot y)\in G,\ \ \forall\, x,y\in\mathbb{R}^*$. Cum operaţia de înmulţire a matricelor este asociativă, $I_2=A(1)\in G$ şi $A(x)^{-1}=A\left(\dfrac{1}{x}\right)\in G,\ \forall\, x\in\mathbb{R}^*$, rezultă că G este un grup abelian. ..... **(3p)**

PROBLEMA 4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui f. Să se arate ca nu există $a,b\in\mathbb{R}^*$, astfel încât

$$f(ax-bF(x))=ax+b,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Barem de corectare. Presupunem ca există două numere $a,b\in\mathbb{R}^*$ care verifică relaţia din enunţ.

Considerăm funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $g(x)=ax-bF(x)$.

Astfel, din $f(g(x))=ax+b$ obţinem că funcţia $f\circ g$ este bijectivă, de unde rezultă că g este injectivă, iar f este surjectivă. .... **(3p)**

Din faptul că funcţia g este continuă şi injectivă, obţinem că g este strict monotonă. ...... **(2p)**

Dar, cum g este derivabilă, cu $g'(x)=a-bf(x)$, rezultă că

$$a-bf(x)\le 0\ ,\forall\, x\in\mathbb{R} \quad \text{sau} \quad a-bf(x)\ge 0\ ,\forall\, x\in\mathbb{R}$$

ceea ce contrazice surjectivitatea lui f.. **(2p)**

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.