



# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25.02.2023

Clasa a V – a

**PROBLEMA 1.** Să se afle suma numerelor naturale  $a, b, c, d, e$  pentru care, în fiecare dintre perechile de mai jos, diferența posibilă între numere este cea mai mică:

$$(3a, 2023), (7b + 5, 2023), (13c + 5, 2023), (d^2, 2023), (2^e, 2023).$$

(De exemplu, pentru perechea  $(4, 9)$ , diferența posibilă este  $9 - 4$ , iar în perechea  $(14, 9)$ , diferența posibilă este  $14 - 9$ .)

**PROBLEMA 2.** Cu cifrele 1, 2, 3 și 4 se formează două numere diferite, având fiecare patru cifre distincte. Arătați că niciunul dintre aceste numere nu se divide cu celălalt.

**PROBLEMA 3.**

- Scrieți numărul 252525 ca sumă de 6 pătrate perfecte distincte nenule.
- Demonstrați că există cel puțin 27 de numere de forma  $\overbrace{abab \dots ab}^{2022 \text{ cifre}}$  care se pot scrie ca sumă de 2022 pătrate perfecte distincte nenule.

**PROBLEMA 4.** Pe o tablă sunt scrise trei numere naturale nenule distincte.

- Andra împarte cele trei numere de pe tablă la 6 și obține resturi egale cu 1 sau cu 3;
  - Carla adună două câte două numere de pe tablă și împarte de fiecare dată rezultatul la 6, obținând resturi egale cu 0 sau cu 4, cel puțin câte un rest din fiecare;
  - Matei adună cele trei numere de pe tablă și împarte suma la 6.
- Ce rest a obținut Matei?
  - Aflați numerele scrise pe tablă, știind că suma celor mai mici două numere de pe tablă este 82, iar suma celor mai mari două numere de pe tablă este 96.

<sup>1</sup>Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;

<sup>2</sup>Toate problemele sunt obligatorii;

<sup>3</sup>Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25.02.2023

Clasa a VI – a

**PROBLEMA 1.** Fie  $n \in \mathbb{N}$ . În jurul punctului  $O$  se construiesc unghiurile  $A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4, \dots, A_{23}OA_1$ , astfel încât  $\sphericalangle A_1OA_2 = 1^\circ, \sphericalangle A_2OA_3 = 2^\circ, \sphericalangle A_3OA_4 = 3^\circ, \dots, \sphericalangle A_{22}OA_{23} = 22^\circ$ , iar  $\sphericalangle A_{23}OA_1 = n^\circ$ . Să se arate că:

- $\sphericalangle A_{23}OA_1$  este unghi obtuz;
- bisectoarele unghiurilor  $\sphericalangle A_{12}OA_{13}$  și  $\sphericalangle A_{18}OA_{19}$  sunt perpendiculare;
- $OA_5$  și  $OA_{20}$  sunt semidrepte opuse.

**PROBLEMA 2.** Fie  $x$  și  $y$  două numere naturale nenule, pentru care  $\frac{x+5}{y} = \frac{x}{y-7}$ .

- Să se demonstreze că  $5|x$  și  $7|y$ ;
- Să se determine cea mai mare valoare posibilă a raportului  $\frac{y}{x}$ .

**PROBLEMA 3.** Profesorul de matematică scrie pe tablă cifrele: 1, 1, 1, 8, 8, 8. Alexandra iese la tablă și scrie toate numerele de 6 cifre, așa încât în fiecare număr să apară toate cifrele scrise de profesor pe tablă.

- Să se arate că suma numerelor scrise de Alexandra este divizibilă cu 63;
- Aflați cel mai mare divizor comun al numerelor scrise de Alexandra pe tablă.

**PROBLEMA 4.** Tatăl lui Andrei are într-o urnă 36 de bile, numerotate de la 1 la 36 și extrage la întâmplare 6 dintre ele. Andrei are la dispoziție 9 cartonașe și trebuie să scrie pe fiecare câte 6 numere dintre numerele naturale de la 1 la 36. Un cartonaș se numește câștigător dacă nu conține nici unul dintre cele 6 numere extrase de tatăl său. Pentru a ieși la joacă, Andrei trebuie să aibă cel puțin un cartonaș câștigător. Poate găsi Andrei o strategie să meargă la joacă? Justificați răspunsul.

<sup>1</sup>Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;

<sup>2</sup>Toate problemele sunt obligatorii;

<sup>3</sup>Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25.02.2023

Clasa a VII – a

## PROBLEMA 1.

- a) Aflați numerele raționale  $p$  și  $q$  știind că  $p(\sqrt{12} - 1) + q(5 - \sqrt{108}) = p - 1$ ;  
b) Fie numărul real

$$a = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2022} + \sqrt{2023}}.$$

Aflați cel mai mic număr natural  $n$  cu proprietatea că  $a \leq n$ .

## PROBLEMA 2. Să se demonstreze că:

- a) Dacă  $n$  este un număr natural impar, atunci restul împărțirii numărului  $n^2$  la 4 este 1;  
b) Dacă  $p$  și  $q$  sunt numere prime, atunci  $\sqrt{p^2 + 2q^2}$  este un număr irațional;  
c) Există o infinitate de perechi  $(p, q)$  de numere naturale nenule, pentru care  $\sqrt{p^2 + 2q^2}$  este un număr rațional.

**PROBLEMA 3.** În pătratul  $ABCD$  considerăm  $M$  mijlocul laturii  $[AB]$ ,  $N$  mijlocul laturii  $[BC]$ ,  $AN \cap DM = \{P\}$  și  $CP \cap AB = \{Q\}$ .

- a) Demonstrați că patrulaterul  $PMBN$  este inscriptibil.  
b) Dacă  $AB = 8$  cm, calculați  $AQ$ .

**PROBLEMA 4.** Se consideră un pătrat cu lungimea laturii de 2023 cm, care se împarte în  $2023^2$  pătrățele cu latura de 1 cm. Se colorează cu albastru  $n$  dintre centrele acestor pătrățele.

- a) Arătați că dacă  $n = 4045$ , atunci colorarea se poate face astfel încât oricare patru dintre punctele albastre să nu fie vârfurile unui paralelogram.  
b) Arătați că dacă  $n = 4046$ , atunci indiferent cum se face colorarea există patru puncte albastre care să fie vârfurile unui paralelogram.

<sup>1</sup>Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

<sup>2</sup>Toate problemele sunt obligatorii;

<sup>3</sup>Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25.02.2023

Clasa a VIII – a

**PROBLEMA 1.** Aflați numerele prime  $p$  care au proprietatea că  $2p^2 - 3p + 1$  este pătrat perfect.

**PROBLEMA 2.** În paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$  cu  $AB = 12 \text{ cm}$  și  $BC = BB' = 6\sqrt{2} \text{ cm}$ , se consideră mijloacele  $M$  și  $N$  ale segmentelor  $AB$ , respectiv  $C' D'$ .

- Să se demonstreze că  $(A' DN) \parallel (B' CM)$ ;
- Să se demonstreze că  $BD' \perp (B' CM)$ ;
- Să se afle distanța dintre planele  $(A' DN)$  și  $(B' CM)$ .

**PROBLEMA 3.** Să se demonstreze că:

- $\frac{a^2 + b^2}{2} > ab$ , oricare ar fi  $a$  și  $b$  două numere reale diferite;
- $\frac{1}{2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1} + \frac{1}{2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 2022^2 + 2 \cdot 2022 + 1} < \frac{1011}{2023}$ .

**PROBLEMA 4.** Fie  $A, B, C, D$  patru puncte necoplanare,  $E$  și  $F$  mijloacele segmentelor  $AC$ , respectiv  $BD$ , astfel încât  $AD = BC$ ,  $AC = BD = 2\sqrt{15} \text{ cm}$ , iar  $2EF = AB = CD = 2\sqrt{5} \text{ cm}$ .

- Arătați că triunghiul  $DEB$  este isoscel.
- Calculați distanța dintre dreptele  $AC$  și  $BD$ ;
- Aflați măsura unghiului dintre dreptele  $AC$  și  $BD$ .

<sup>1</sup>Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

<sup>2</sup>Toate problemele sunt obligatorii;

<sup>3</sup>Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25.02.2023

Clasa a IX – a

**PROBLEMA 1.** Să se determine  $m, n \in \mathbb{N}$ , astfel încât numărul  $\frac{\sqrt{m} + \sqrt{5}}{\sqrt{n} + 1}$  să fie rațional.

**PROBLEMA 2.** Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $[x]^2 + 4x + \{x\} + \sqrt{3} = 0$ .

**PROBLEMA 3.** Să se arate că:

- Dacă  $a, b, c \in (0, +\infty)$ , atunci are loc inegalitatea  $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ ;
- Dacă  $a, b, c \in (0, +\infty)$ , atunci are loc inegalitatea

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b} + 2\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c} + 2\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + 2\sqrt{b}} \geq 1.$$

**PROBLEMA 4.** Fie triunghiul  $ABC$  cu laturile de lungimi  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$  și  $A' \in (BC)$ ,  $B' \in (AC)$ ,  $C' \in (AB)$  picioarele bisectoarelor unghiurilor triunghiului.

Să se arate că:

- $\overrightarrow{AA'} = \frac{b}{b+c} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{AC}$ ;
- Triunghiul  $ABC$  este echilateral, dacă și numai dacă  $a \cdot \overrightarrow{AA'} + b \cdot \overrightarrow{BB'} + c \cdot \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ .

<sup>1</sup>Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

<sup>2</sup>Toate problemele sunt obligatorii;

<sup>3</sup>Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25.02.2023

Clasa a X – a

## PROBLEMA 1.

- a) Să se determine valorile lui  $z \in \mathbb{C}$ , pentru care  $z^2 + 2|z|^2 - 4 = 0$ .
- b) Să se arate că dacă  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$  și  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , astfel încât  $az^2 + bz + c = 0$ , atunci  $|z| < 2 \left| \frac{c}{b} \right|$ .

## PROBLEMA 2.

Să se arate că dacă  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| = 1$ , atunci:

- a)  $\sqrt{2} \leq |1 - z| + |1 + z^2| \leq 4$ ;
- b)  $2 \leq |z + 1| + |z - 1| \leq 2\sqrt{2}$ .

## PROBLEMA 3.

Să se determine valorile reale ale lui  $x$ , pentru care  $2\sqrt[3]{2x - 1} = x^3 + 1$ .

## PROBLEMA 4.

Să se determine funcțiile  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , care satisfac condițiile:

- a)  $f(x) \leq \ln x, \forall x \in (0, +\infty)$ ;
- b)  $f(x \cdot y) \leq f(x) + f(y), \forall x, y \in (0, +\infty)$ .

<sup>1</sup>Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

<sup>2</sup>Toate problemele sunt obligatorii;

<sup>3</sup>Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25.02.2023

Clasa a XI – a

**PROBLEMA 1.** Fie matricele  $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ , astfel încât  $\det(A+B) = \det B \neq 0$  și  $\operatorname{tr}(AB^{-1}) \neq 0$ . Arătați că matricea  $A$  este inversabilă.

**PROBLEMA 2.** Să se determine numărul  $a > 0$ , știind că partea întreagă a numărului  $(n^2 - n)(\sqrt[n]{a} - 1)$  este egală cu  $n - 1$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

**PROBLEMA 3.** Să se calculeze:

a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{2023!}{(k+1)(k+2)\dots(k+2023)}$ ;      b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$ .

**PROBLEMA 4.**

a) Fie matricele  $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ . Să se determine numerele  $x$  și  $y$ , știind că

$$AB = \begin{pmatrix} x & 7 \\ 18 & 7 \end{pmatrix} \text{ și } BA = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 3 & y \end{pmatrix}.$$

b) Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , cu  $a \in (0, 1)$  și  $b \in \mathbb{R}$ .

(i) Să se arate că există două șiruri de numere reale  $(a_n)_{n \geq 1}$  și  $(b_n)_{n \geq 1}$ , cu proprietatea că

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 0 & a_n \end{pmatrix}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*;$$

(ii) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$  și  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ .

<sup>1</sup>Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

<sup>2</sup>Toate problemele sunt obligatorii;

<sup>3</sup>Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25.02.2023

Clasa a XII – a

**PROBLEMA 1.** Fie  $(G, \cdot)$  un grup cu elementul neutru  $e$  și  $a \in G \setminus \{e\}$  un element cu proprietatea că  $x = a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot a^{2023}$ , pentru orice  $x \in G$ .

- Să se determine ordinul lui  $a$  în grupul  $G$ ;
- Să se demonstreze că grupul  $G$  este abelian.

**PROBLEMA 2.** Fie  $(G, \cdot)$  un grup finit,  $f : G \rightarrow G$  un automorfism al lui  $G$  și funcția  $h : G \rightarrow G$ , definită prin  $h(x) = x^{-1}f(x)$ .

- Să se demonstreze că  $f$  are un singur punct fix, dacă și numai dacă funcția  $h$  este bijectivă;
- Să se demonstreze că dacă  $f$  are un singur punct fix și  $f \circ f = 1_G$ , atunci grupul  $G$  este comutativ.

**Notă.** Un element  $a \in G$  se numește punct fix al funcției  $f : G \rightarrow G$ , dacă  $f(a) = a$ . Despre un morfism de grupuri  $f : G \rightarrow G$  se spune că are un singur punct fix, dacă  $f(x) = x \Leftrightarrow x = e$ .

**PROBLEMA 3.** Să se calculeze:

- $I = \int \frac{x(x^2 + 1)}{x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1} dx$ ,  $x \in (1, +\infty)$ ;
- $J = \int_a^b \frac{c + a \sin^n x + b \cos^n x}{4c + \pi(\sin^n x + \cos^n x)} dx$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $c > 0$ , iar  $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  cu  $a + b = \frac{\pi}{2}$ .

**PROBLEMA 4.** Considerăm șirul  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , definit prin  $I_0 = \frac{\pi}{4}$  și  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x \, dx$ , pentru  $n \in \mathbb{N}^*$ . Să se arate că:

- $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ;
- șirul  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este descrescător,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$  și  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \frac{1}{4}$ ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right) = \frac{\pi}{4}$ .

<sup>1</sup>Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

<sup>2</sup>Toate problemele sunt obligatorii;

<sup>3</sup>Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.