OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

Clasa a V – a

PROBLEMA 1. Să se afle suma numerelor naturale a, b, c, d, e pentru care, în fiecare dintre perechile de mai jos, diferenţa posibilă între numere este cea mai mică:

$$(3a,\ 2023),\quad (7b+5,\ 2023),\quad (13c+5,\ 2023),\quad \left(d^2,\ 2023\right),\quad (2^e,\ 2023).$$

(De exemplu, pentru perechea $(4,9)$, diferenţa posibilă este $9-4$, iar în perechea $(14,9)$, diferenţa posibilă este $14-9$)

PROBLEMA 2. Cu cifrele $1, 2, 3$ şi 4 se formează două numere diferite, având fiecare patru cifre distincte. Arătaţi că niciunul dintre aceste numere nu se divide cu celălalt.

PROBLEMA 3.

a) Scrieţi numărul 252525 ca sumă de 6 pătrate perfecte distincte nenule.

b) Demonstraţi că există cel puţin 27 de numere de forma $\underbrace{\overline{abab\ldots ab}}_{2022\ cifre}$ care se pot scrie ca sumă de 2022 pătrate perfecte distincte nenule.

PROBLEMA 4. Pe o tablă sunt scrise trei numere naturale nenule distincte.

- Andra împarte cele trei numere de pe tablă la 6 şi obţine resturi egale cu 1 sau cu 3;
- Carla adună două câte două numere de pe tablă şi împarte de fiecare dată rezultatul la 6, obţinând resturi egale cu 0 sau cu 4, cel puţin câte un rest din fiecare;
- Matei adună cele trei numere de pe tablă şi împarte suma la 6.

a) Ce rest a obţinut Matei?

b) Aflaţi numerele scrise pe tablă, ştiind că suma celor mai mici două numere de pe tablă este 82, iar suma celor mai mari două numere de pe tablă este 96.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

Clasa a VI – a

PROBLEMA 1. Fie $n \in \mathbb{N}$. În jurul punctului O se construiesc unghiurile A_1OA_2, A_2OA_3, $A_3OA_4, ...,$ $A_{23}OA_1$, astfel încât $\sphericalangle A_1OA_2 = 1^\circ$, $\sphericalangle A_2OA_3 = 2^\circ$, $\sphericalangle A_3OA_4 = 3^\circ, ..., \sphericalangle A_{22}OA_{23} = 22^\circ$, iar $\sphericalangle A_{23}OA_1 = n^\circ$. Să se arate că:

a) $\sphericalangle A_{23}OA_1$ este unghi obtuz;

b) bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A_{12}OA_{13}$ şi $\sphericalangle A_{18}OA_{19}$ sunt perpendiculare;

c) OA_5 şi OA_{20} sunt semidrepte opuse.

PROBLEMA 2. Fie x şi y două numere naturale nenule, pentru care $\dfrac{x+5}{y} = \dfrac{x}{y-7}$.

a) Să se demonstreze că $5|x$ şi $7|y$;

b) Să se determine cea mai mare valoare posibilă a raportului $\dfrac{y}{x}$.

PROBLEMA 3. Profesorul de matematică scrie pe tablă cifrele: $1, 1, 1, 8, 8, 8$. Alexandra iese la tablă şi scrie toate numerele de 6 cifre, aşa încât în fiecare număr să apară toate cifrele scrise de profesor pe tablă.

a) Să se arate că suma numerelor scrise de Alexandra este divizibilă cu 63;

b) Aflaţi cel mai mare divizor comun al numerelor scrise de Alexandra pe tablă.

PROBLEMA 4. Tatăl lui Andrei are într-o urnă 36 de bile, numerotate de la 1 la 36 şi extrage la întâmplare 6 dintre ele. Andrei are la dispoziţie 9 cartonaşe şi trebuie să scrie pe fiecare câte 6 numere dintre numerele naturale de la 1 la 36. Un cartonaş se numeşte câştigător dacă nu conţine nici unul dintre cele 6 numere extrase de tatăl său. Pentru a ieşi la joacă, Andrei trebuie să aibă cel puţin un cartonaş câştigător. Poate găsi Andrei o strategie să meargă la joacă? Justificaţi răspunsul.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

Clasa a VII – a

PROBLEMA 1.

a) Aflaţi numerele raţionale p şi q ştiind că $p\left(\sqrt{12}-1\right)+q\left(5-\sqrt{108}\right)=p-1$;

b) Fie numărul real $a=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2023}}$. Aflaţi cel mai mic număr natural n cu proprietatea că $a \leq n$.

PROBLEMA 2. Să se demonstreze că:

a) Dacă n este un număr natural impar, atunci restul împărţirii numărului n^2 la 4 este 1;

b) Dacă p şi q sunt numere prime, atunci $\sqrt{p^2+2q^2}$ este un număr iraţional;

c) Există o infinitate de perechi (p, q) de numere naturale nenule, pentru care $\sqrt{p^2+2q^2}$ este un număr raţional.

PROBLEMA 3. În pătratul $ABCD$ considerăm M mijlocul laturii $[AB]$, N mijlocul laturii $[BC]$, $AN \cap DM=\{P\}$ şi $CP \cap AB=\{Q\}$.

a) Demonstraţi că patrulaterul $PMBN$ este inscriptibil;

b) Dacă $AB=8\ cm$, calculaţi AQ.

PROBLEMA 4. Se consideră un pătrat cu lungimea laturii de 2023 cm, care se împarte în 2023^2 pătrăţele cu latura de 1 cm. Se colorează cu albastru n dintre centrele acestor pătrăţele.

a) Arătaţi că dacă $n=4045$, atunci colorarea se poate face astfel încât oricare patru dintre punctele albastre să nu fie vârfurile unui paralelogram.

b) Arătaţi că dacă $n=4046$, atunci indiferent cum se face colorarea există patru puncte albastre care să fie vârfurile unui paralelogram.

---

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

Clasa a VIII – a

PROBLEMA 1. Aflaţi numerele prime p care au proprietatea că $2p^2-3p+1$ este pătrat perfect.

PROBLEMA 2. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 12\ cm$ şi $BC = BB' = 6\sqrt{2}\ cm$, se consideră mijloacele M şi N ale segmentelor AB, respectiv $C'D'$.

a) Să se demonstreze că $(A'DN) \parallel (B'CM)$;

b) Să se demonstreze că $BD' \perp (B'CM)$;

c) Să se afle distanţa dintre planele $(A'DN)$ şi $(B'CM)$.

PROBLEMA 3. Să se demonstreze că:

a) $\dfrac{a^2+b^2}{2} > ab$, oricare ar fi a şi b două numere reale diferite;

b) $\dfrac{1}{2\cdot 1^2+2\cdot 1+1}+\dfrac{1}{2\cdot 2^2+2\cdot 2+1}+\dots+\dfrac{1}{2\cdot 2022^2+2\cdot 2022+1}<\dfrac{1011}{2023}$.

PROBLEMA 4. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare, E şi F mijloacele segmentelor AC, respectiv BD, astfel încât $AD = BC$, $AC = BD = 2\sqrt{15}\ cm$, iar $2EF = AB = CD = 2\sqrt{5}\ cm$.

a) Arătaţi că triunghiul DEB este isoscel.

b) Calculaţi distanţa dintre dreptele AC şi BD;

c) Aflaţi măsura unghiului dintre dreptele AC şi BD.

---

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

[2] Toate problemele sunt obligatorii;

[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

MINISTERUL EDUCAȚIEI
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA FILIALA BIHOR
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

Clasa a IX – a

PROBLEMA 1. Să se determine $m, n \in \mathbb{N}$, astfel încât numărul $\dfrac{\sqrt{m}+\sqrt{5}}{\sqrt{n}+1}$ să fie raţional.

PROBLEMA 2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $[x]^2 + 4x + \{x\} + \sqrt{3} = 0$.

PROBLEMA 3. Să se arate că:

a) Dacă $a, b, c \in (0, +\infty)$, atunci are loc inegalitatea $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$;

b) Dacă $a, b, c \in (0, +\infty)$, atunci are loc inegalitatea

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}+2\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}+2\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+2\sqrt{b}} \geq 1.$$

PROBLEMA 4. Fie triunghiul ABC cu laturile de lungimi $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ şi $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$ picioarele bisectoarelor unghiurilor triunghiului.

Să se arate că:

a) $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{b}{b+c} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{AC}$;

b) Triunghiul ABC este echilateral, dacă şi numai dacă $a \cdot \overrightarrow{AA'} + b \cdot \overrightarrow{BB'} + c \cdot \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

Clasa a X – a

PROBLEMA 1.

a) Să se determine valorile lui $z \in \mathbb{C}$, pentru care $z^2 + 2|z|^2 - 4 = 0$.

b) Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ şi $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, astfel încât $az^2 + bz + c = 0$, atunci $|z| < 2\left|\frac{c}{b}\right|$.

PROBLEMA 2. Să se arate că dacă $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$, atunci:

a) $\sqrt{2} \leq |1 - z| + |1 + z^2| \leq 4$;

b) $2 \leq |z + 1| + |z - 1| \leq 2\sqrt{2}$.

PROBLEMA 3. Să se determine valorile reale ale lui x, pentru care $2\sqrt[3]{2x-1} = x^3 + 1$.

PROBLEMA 4. Să se determine funcţiile $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, care satisfac condiţiile:

a) $f(x) \leq \ln x$, $\forall\ x \in (0, +\infty)$;

b) $f(x \cdot y) \leq f(x) + f(y)$, $\forall\ x, y \in (0, +\infty)$.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

Clasa a XI – a

PROBLEMA 1. Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, astfel încât $\det(A+B) = \det B \neq 0$ şi $\operatorname{tr}(AB^{-1}) \neq 0$. Arătaţi că matricea A este inversabilă.

PROBLEMA 2. Să se determine numărul $a > 0$, ştiind că partea întreagă a numărului $(n^2 - n)(\sqrt[n]{a} - 1)$ este egală cu $n - 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

PROBLEMA 3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2023!}{(k+1)(k+2)\dots(k+2023)}$;   b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sin\dfrac{1}{x} + \cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

PROBLEMA 4.

a) Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{C})$. Să se determine numerele x şi y, ştiind că

$$AB = \begin{pmatrix} x & 7 \\ 18 & 7 \end{pmatrix} \text{ şi } BA = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 3 & y \end{pmatrix}.$$

b) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, cu $a \in (0,1)$ şi $b \in \mathbb{R}$.

(*i*) Să se arate că există două şiruri de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$, cu proprietatea că $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

(*ii*) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ şi $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

MINISTERUL EDUCAȚIEI
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
FILIALA BIHOR
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

Clasa a XII – a

PROBLEMA 1. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e şi $a \in G \setminus \{e\}$ un element cu proprietatea că $x = a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot a^{2023}$, pentru orice $x \in G$.

a) Să se determine ordinul lui a în grupul G;

b) Să se demonstreze că grupul G este abelian.

PROBLEMA 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit, $f : G \to G$ un automorfism al lui G şi funcţia $h : G \to G$, definită prin $h(x) = x^{-1} f(x)$.

a) Să se demonstreze că f are un singur punct fix, dacă şi numai dacă funcţia h este bijectivă;

b) Să se demonstreze că dacă f are un singur punct fix şi $f \circ f = 1_G$, atunci grupul G este comutativ.

Notă. Un element $a \in G$ se numeşte punct fix al funcţiei $f : G \to G$, dacă $f(a) = a$. Despre un morfism de grupuri $f : G \to G$ se spune că are un singur punct fix, dacă $f(x) = x \Leftrightarrow x = e$.

PROBLEMA 3. Să se calculeze:

a) $I = \displaystyle\int \frac{x(x^2+1)}{x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1} dx, \quad x \in (1, +\infty)$;

b) $J = \displaystyle\int_a^b \frac{c + a\sin^n x + b\cos^n x}{4c + \pi(\sin^n x + \cos^n x)} dx$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, $c > 0$, iar $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ cu $a + b = \frac{\pi}{2}$.

PROBLEMA 4. Considerăm şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $I_0 = \frac{\pi}{4}$ şi $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{2n} x \, dx$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

a) $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

b) şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \dfrac{1}{4}$;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right) = \dfrac{\pi}{4}$.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.