OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V – a

PROBLEMA 1. Să se afle suma numerelor naturale a, b, c, d, e pentru care, în fiecare dintre perechile de mai jos, diferenţa posibilă între numere este cea mai mică:

$$(3a, 2023), \quad (7b+5, 2023), \quad (13c+5, 2023), \quad \left(d^2, 2023\right), \quad (2^e, 2023).$$

(De exemplu, pentru perechea $(4, 9)$, diferenţa posibilă este $9-4$, iar în perechea $(14, 9)$, diferenţa posibilă este $14-9$.)

Barem de corectare. Avem:

$2023 = 3 \cdot 674 + 1 \Rightarrow a = 674$ .... (**1p**)

$2023 = 7 \cdot 289 \Rightarrow b = 288$ .... (**1p**)

$2023 = 13 \cdot 155 + 8 \Rightarrow c = 155$ ...... (**2p**)

$2025 = 45^2 \Rightarrow d = 45$ .... (**1p**)

$2048 = 2^{11} \Rightarrow e = 11$ .... (**1p**)

Suma cerută este $a + b + c + d + e = 1173$. .... (**1p**)

PROBLEMA 2. Cu cifrele $1, 2, 3$ şi 4 se formează două numere diferite, având fiecare patru cifre distincte. Arătaţi că niciunul dintre aceste numere nu se divide cu celălalt.

Barem de corectare.

Fie a şi b cele două numere. Deoarece $1 + 2 + 3 + 4 = 10 = 3 \cdot 3 + 1$, rezultă că $a = 3k + 1$ şi $b = 3l + 1$, unde $k, l \in \mathbb{N}^*$. .... (**3p**)

Pentru fixare să luăm $a < b$. Cel mai mic număr format cu aceste cifre este 1234, iar cel mai mare este 4321; rezultă că $b < 4a$. .... (**1p**)

Cum $0 < a < b$, avem doar posibilitatea $a|b$, de unde $b = 2a$ sau $b = 3a$. .... (**1p**)

Dacă $b = 2a$, atunci $3l + 1 = 2(3k + 1)$, de unde se obţine $3(l - 2k) = 1$, imposibil. ... (**1p**)

Dacă $b = 3a$, atunci $3|b$, imposibil. .... (**1p**)

PROBLEMA 3.

a) Scrieţi numărul 252525 ca sumă de 6 pătrate perfecte distincte nenule.

b) Demonstraţi că există cel puţin 27 de numere de forma $\underbrace{\overline{abab\ldots ab}}_{2022\ cifre}$ care se pot scrie ca sumă de 2022 pătrate perfecte distincte nenule.

Barem de corectare.

a) Numărul 252525 se poate scrie astfel:

$$252525 = 25\cdot 10^4 + 25\cdot 10^2 + 25 = 25\left(10^4+10^2+1\right) = (3^2+4^2)\left(10^4+10^2+1\right)$$
$$= 3^2\cdot\left(10^4+10^2+1\right) + 4^2\cdot\left(10^4+10^2+1\right)$$
$$= \left(3\cdot 10^2\right)^2 + (3\cdot 10)^2 + 3^2 + \left(4\cdot 10^2\right)^2 + (4\cdot 10)^2 + 4^2$$ .... **(2p)**

b) Numărul din enunţ se scrie astfel:

$$\overline{ab}\cdot 10^{2020} + \overline{ab}\cdot 10^{2018} + \cdots + \overline{ab} = \overline{ab}\cdot\left(10^{2020}+10^{2018}+\cdots+1\right).$$

În continuare vom determina acele numere $\overline{ab}$ care se pot exprima ca sumă de două pătrate perfecte distincte. .... **(2p)**

Avem următoarele posibilităţi: .... **(2p)**

$1^2+3^2=10$ $\quad 2^2+3^2=13$ $\quad 3^2+4^2=25$ $\quad 4^2+5^2=41$ $\quad 5^2+6^2=61$ $\quad \boxed{6^2+7^2=85}$

$1^2+4^2=17$ $\quad 2^2+4^2=20$ $\quad 3^2+5^2=34$ $\quad 4^2+6^2=52$ $\quad 5^2+7^2=74$

$1^2+5^2=26$ $\quad 2^2+5^2=29$ $\quad 3^2+6^2=45$ $\quad \boxed{4^2+7^2=65}$ $\quad 5^2+8^2=89$

$1^2+6^2=37$ $\quad 2^2+6^2=40$ $\quad 3^2+7^2=58$ $\quad 4^2+8^2=80$

$1^2+7^2=50$ $\quad 2^2+7^2=53$ $\quad 3^2+8^2=73$ $\quad 4^2+9^2=97$

$\boxed{1^2+8^2=65}$ $\quad 2^2+8^2=68$ $\quad 3^2+9^2=90$

$1^2+9^2=82$ $\quad \boxed{2^2+9^2=85}$

Aşadar, există cel puţin $(7+7+6+5+3+1)-2=27$ de astfel de numere .... **(1p)**

PROBLEMA 4. Pe o tablă sunt scrise trei numere naturale nenule distincte.

- Andra împarte cele trei numere de pe tablă la 6 şi obţine resturi egale cu 1 sau cu 3;
- Carla adună două câte două numere de pe tablă şi împarte de fiecare dată rezultatul la 6, obţinând resturi egale cu 0 sau cu 4, cel puţin câte un rest din fiecare;
- Matei adună toate numerele de pe tablă şi împarte suma la 6.

a) Ce rest a obţinut Matei?

b) Aflaţi numerele scrise pe tablă, ştiind că suma celor mai mici două numere de pe tablă este 82, iar suma celor mai mari două numere de pe tablă este 96.

Barem de corectare.

a) Fie a, b şi c cele trei numere. Resturile obţinute de Andra prin împărţirea la 6 pot fi doar 1 sau 3. Dacă două dintre numere dau restul 1 prin împărţirea la 6, atunci restul împărţirii sumei lor la 6 va fi egal cu 2, imposibil, deoarece Carla a obţinut doar 0 sau 4 ca rest. De asemenea, nu este posibil ca toate cele trei numere să dea restul 3 prin împărţirea la 6, deoarece Carla nu ar obţine şi restul 4. Astfel rezultă că două dintre numere dau restul 3 prin împărţirea la 6, iar cel de-al treilea dă restul 1 prin împărţirea la 6. .... (**3p**)

Fie, de exemplu, $a = 6x+3,\ \ b = 6y+3,\ \ c = 6z+1$.Rezultă că $a+b+c = 6\,(x+y+z)+7 = 6\,(x+y+z+1)+1$, adică restul obţinut de Matei este egal cu 1..................... (**1p**)

b) Observăm că nu se poate ca a şi b să fie cele mai mici numere, deoarece $6|a+b$, deci $a+b \neq 82$. Dacă $a+c = 82$ (cazul $b+c = 82$ este analog), atunci $6\,(x+z) = 78$, deci $x+z = 13$. Observăm că a şi b sunt cele mai mari numere, de unde $x+y = 15$.................. (**2p**)

Ordinea numerelor este $c < a < b$, de unde $z \leq x < y$. Soluţiile sunt: $x = 7$, $y = 8$, $z = 6$ de unde $a = 45$, $b = 51$, $\ c = 37$... (**1p**)

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI – a

PROBLEMA 1. Fie $n \in \mathbb{N}$. În jurul punctului O se construiesc unghiurile A_1OA_2, A_2OA_3, $A_3OA_4, ...,$ $A_{23}OA_1$, astfel încât $\sphericalangle A_1OA_2 = 1^\circ$, $\sphericalangle A_2OA_3 = 2^\circ$, $\sphericalangle A_3OA_4 = 3^\circ, ..., \sphericalangle A_{22}OA_{23} = 22^\circ$, iar $\sphericalangle A_{23}OA_1 = n^\circ$. Să se arate că:

a) $\sphericalangle A_{23}OA_1$ este unghi obtuz;

b) bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A_{12}OA_{13}$ şi $\sphericalangle A_{18}OA_{19}$ sunt perpendiculare;

c) OA_5 şi OA_{20} sunt semidrepte opuse.

Barem de corectare.

a) Deoarece $\sphericalangle A_1OA_2 + \sphericalangle A_2OA_3 + ... + \sphericalangle A_{22}OA_{23} = 1^\circ + 2^\circ + ... + 22^\circ = 253^\circ$, ... **(1p)**

rezultă că $\sphericalangle A_{23}OA_1 = 360^\circ - 253^\circ = 107^\circ$, adică $\sphericalangle A_{23}OA_1$ este un unghi obtuz; ... **(2p)**

b) Fie semidreptele OB şi OC bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A_{12}OA_{13}$, respectiv $\sphericalangle A_{18}OA_{19}$. Deoarece $\sphericalangle BOA_{13} = 6^\circ$, iar $\sphericalangle A_{18}OC = 9^\circ$ .... **(1p)**

obţinem că $\sphericalangle BOC = 6^\circ + 13^\circ + 14^\circ + 15^\circ + 16^\circ + 17^\circ + 9^\circ = 90^\circ$ .... **(1p)**

c) Deoarece $\sphericalangle A_5OA_{20} = 5^\circ + 6^\circ + 7^\circ + ... + 19^\circ = 180^\circ$, rezultă că semidreptele OA_5 şi OA_{20} sunt opuse .... **(2p)**

PROBLEMA 2. Fie x şi y două numere naturale nenule, pentru care $\dfrac{x+5}{y} = \dfrac{x}{y-7}$.

a) Să se demonstreze că $5|x$ şi $7|y$;

b) Să se determine cea mai mare valoare posibilă a raportului $\dfrac{y}{x}$.

Barem de corectare.

a) Din $\dfrac{x+5}{x} = \dfrac{y}{y-7} \Leftrightarrow \dfrac{5}{x} = \dfrac{7}{y-7}$, se obţine $5y - 35 = 7x$. .... **(2p)**

de unde rezultă că $5|x$ şi $7|y$ .... **(2p)**

b) Din $5y = 7x + 35$ se obţine $\dfrac{y}{x} = \dfrac{7}{x} + \dfrac{7}{5}$ .... **(2p)**

Cea mai mare valoare a raportului $\dfrac{y}{x}$ se obţine pentru cea mai mică valoare posibilă a lui x, adică $x = 5$. Obţinem de aici că $y = 14$ şi valoarea maximă a raportului $\dfrac{y}{x}$ este $\dfrac{14}{5}$.... **(1p)**

PROBLEMA 3. Profesorul de matematică scrie pe tablă cifrele: $1, 1, 1, 8, 8, 8$. Alexandra iese la tablă şi scrie toate numerele de 6 cifre, aşa încât în fiecare număr să apară toate cifrele scrise de profesor pe tablă.

a) Să se arate că suma numerelor scrise de Alexandra este divizibilă cu 63;

b) Aflaţi cel mai mare divizor comun al numerelor scrise de Alexandra pe tablă.

Barem de corectare.

a) Deoarece $1+1+1+8+8+8=27$, rezultă că fiecare număr scris de Alexandra pe tablă se divide cu 9 .... **(2p)**

Dacă x este un număr scris de Alexandra pe tablă, atunci numărul $x-111111$ are toate cifrele 0 şi 7, adică se divide cu 7. Cum $111111 = 7 \cdot 15\,873$, obţinem că şi numărul x se divide cu 7 .... **(2p)**

Aşadar, toate numerele scrise de Alexandra se divid cu 63, de unde rezultă că şi suma acestora se divide cu 63 .... **(1p)**

b) Dacă d este cel mai mare divizor comun al numerelor scrise pe tablă, atunci din $d|181881$ şi $d|181818$ rezultă că $d|\left(181881-181818\right)$, adică $d|63$ .... **(1p)**

Dar, cum toate aceste numere se divid cu 63, rezultă că $63|d$, adică $d=63$ .... **(1p)**

PROBLEMA 4. Tatăl lui Andrei are într-o urnă 36 de bile, numerotate de la 1 la 36 şi extrage la întâmplare 6 dintre ele. Andrei are la dispoziţie 9 cartonaşe şi trebuie să scrie pe fiecare câte 6 numere dintre numerele naturale de la 1 la 36. Un cartonaş se numeşte câştigător dacă nu conţine nici unul dintre cele 6 numere extrase de tatăl său. Pentru a ieşi la joacă, Andrei trebuie să aibă cel puţin un cartonaş câştigător. Poate găsi Andrei o strategie să meargă la joacă? Justificaţi răspunsul.

Barem de corectare. O strategie posibilă pentru Andrei este următoarea:

- El împarte numerele în 9 grupe, astfel:

G1: $1,2,3$	G4: $10,11,12$	G7: $19,20,21,22,23,24$	
G2: $4,5,6$	G5: $13,14,15$	G8: $25,26,27,28,29,30$	.... **(1p)**
G3: $7,8,9$	G6: $16,17,18$	G9: $31,32,33,34,35,36$	

- Apoi, împarte cartonaşele în 3 categorii şi scrie pe ele astfel:

Categoria I	primul cartonaş conţine numerele din G1 şi G2	
	al doilea conţine numerele din G1 şi G3	
	al treilea conţine numerele din G2 şi G3	
Categoria II	primul cartonaş conţine numerele din G4 şi G5	
	al doilea conţine numerele din G4 şi G6	.... **(1p)**
	al treilea conţine numerele din G5 şi G6	
Categoria III	primul cartonaş conţine numerele din G7	
	al doilea conţine numerele din G8	
	al treilea conţine numerele din G9	

Analizăm cazul cel mai puţin favorbil pentru Andrei:

- Pentru ca niciunul dintre cartonaşele din categoria I să nu fie câştigător, trebuie ca minim două dintre bilele extrase să fie numerotate cu numere din grupele G1, G2, G3. ..... (**1p**)
- Analog pentru cartonaşele din categoria II. .... (**1p**)
- Deci, pentru ca niciunul dintre cartonaşele din categoriile I şi II să nu fie câştigător, trebuie ca minim 4 dintre numerele de pe bilele extrase să fie de la 1 până la 18.
- Pentru ca niciunul dintre cartonaşele din categoria III să nu fie câştigător, trebuie ca fiecare cartonaş din această categorie să conţină minim un număr dintre cele extrase din urnă. Ar rezulta 7 numere, dar s-au extras doar 6. .... (**2p**)

În concluzie, indiferent care bile vor fi extrase, Andrei va merge la joacă. .... (**1p**)

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 25. 02. 2023
BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII – a

PROBLEMA 1.

a) Aflaţi numerele raţionale p şi q ştiind că $p\left(\sqrt{12}-1\right)+q\left(5-\sqrt{108}\right)=p-1$;

b) Fie numărul real

$$a=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2023}}.$$

Aflaţi cel mai mic număr natural n cu proprietatea că $a \leq n$.

Barem de corectare.

a) Egalitatea se scrie echivalent $(2p-6q)\sqrt{3}=2p-5q-1$. .... **(1p)**

Deoarece numerele $2p-6q$ şi $2p-5q-1$ sunt raţionale, iar numărul $\sqrt{3}$ este iraţional, din relaţia de mai sus rezultă că $2p-6q=2p-5q-1=0$, ...**(1p)**

de unde se obţine soluţia $p=3$ şi $q=1$. .... **(1p)**

b) După raţionalizarea numitorilor, se obţine $a=\sqrt{2023}-1$ .... **(2p)**

Din $a \leq n$, obţinem $\sqrt{2023} \leq n+1 \Leftrightarrow 2023 \leq (n+1)^2$ .... **(1p)**

de unde, n minim este 44 .... **(1p)**

PROBLEMA 2. Să se demonstreze că:

a) Dacă n este un număr natural impar, atunci restul împărţirii numărului n^2 la 4 este 1;

b) Dacă p şi q sunt numere prime, atunci $\sqrt{p^2+2q^2}$ este un număr iraţional;

c) Există o infinitate de perechi (p,q) de numere naturale nenule, pentru care $\sqrt{p^2+2q^2}$ este un număr raţional.

Barem de corectare.

a) Deoarece $n=2k+1 \Rightarrow n^2=4\left(k^2+k\right)+1$, restul împărţirii numărului n^2 la 4 este 1 . **(2p)**

b) Presupunem contrariul. Astfel, dacă p şi q sunt două numere prime pentru care $\sqrt{p^2+2q^2} \in \mathbb{Q}$, atunci rezultă că numărul p^2+2q^2 este pătrat perfect. Aşadar, există un număr natural a, astfel încât $p^2+2q^2=a^2$ ....**(1p)**

Din $2q^2=(a-p)(a+p)$, cum $a-p$ şi $a+p$ au aceeaşi paritate, obţinem că $a-p$ şi $a+p$ sunt pare, adică $q=2$ .... **(1p)**

Astfel, din $8=(a-p)(a+p)$, cum $a-p<a+p$, obţinem că $a-p=2$ şi $a+p=4$, adică $p=1$, ceea ce contrazice ipoteza că p şi q sunt numere prime... .... **(1p)**

c) Din $\sqrt{1^2+2\cdot 2^2}=3$, obţinem că $m\cdot\sqrt{1^2+2\cdot 2^2}=\sqrt{m^2+2\cdot(2m)^2}=3m\in\mathbb{Q}$, pentru orice număr natural nenul m. Aşadar, există o infinitate de perechi (p,q) de numere naturale nenule, pentru care $\sqrt{p^2+2q^2}\in\mathbb{Q}$. .... **(2p)**

PROBLEMA 3. În pătratul $ABCD$ considerăm M mijlocul laturii $[AB]$, N mijlocul laturii $[BC]$, $AN\cap DM=\{P\}$ şi $CP\cap AB=\{Q\}$.

a) Demonstraţi că patrulaterul $PMBN$ este inscriptibil.

b) Dacă $AB=8\ cm$, calculaţi AQ.

Barem de corectare.

a) Din congruenţa triunghiurilor ABN şi DAM ... **(1p)** rezultă că $\sphericalangle ANB\equiv\sphericalangle AMD$. ... **(1p)**

Ca urmare, unghiurile BNP şi BMP sunt suplementare, deci patrulaterul $PMBN$ este inscriptibil .... **(1p)**

b) Fie $AN\cap DC=\{T\}$.

Triunghiurile ABN şi TCN sunt congruente, deci $AB=DC=TC$ .... **(1p)**

Din punctul a), triunghiul DPT este dreptunghic in P, de unde rezultă că $PC=CT$ **(1p)**

Aşadar, $\sphericalangle CTP\equiv\sphericalangle CPT$ şi apoi $\sphericalangle QAP\equiv\sphericalangle QPA$ .... **(1p)**

În triunghiul dreptunghic APM avem $PQ=QA=QM$, deci $AQ=2\ cm$ .... **(1p)**

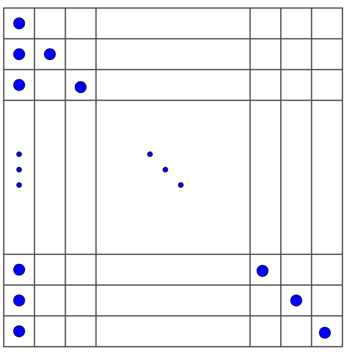
PROBLEMA 4. Se consideră un pătrat cu lungimea laturii de 2023 cm, care se împarte în 2023^2 pătrăţele cu latura de 1 cm. Se colorează cu albastru n dintre centrele acestor pătrăţele .

a) Arătaţi că dacă $n=4045$, atunci colorarea se poate face astfel încât oricare patru dintre punctele albastre să nu fie vârfurile unui paralelogram.

b) Arătaţi că dacă $n=4046$, atunci indiferent cum se face colorarea există patru puncte albastre care să fie vârfurile unui paralelogram.

Barem de corectare.

a) Un exemplu de aşezare este cel din desen.



Colorăm astfel: cele 2023 de centre de pe prima coloană, iar restul de 2022 pe una dintre diagonale. Pentru a forma un paralelogram nu putem lua 3 sau 4 centre coliniare. .. (**1p**)

Luăm 2 centre, O_1 şi O_2 de pe prima coloană şi două centre, O_3 şi O_4 de pe diagonală, aşa încât să nu folosim punctul comun dintre diagonală şi prima coloană. Deoarece O_1O_2 şi O_3O_4 se intersectează în punctul comun dintre diagonală şi prima coloană, nu se poate forma un paralelogram. .... (**1p**)

b) Dacă sunt k coloane cu cel puţin două puncte albastre, pe celelalte $2023-k$ coloane avem în total cel mult $2023-k$ puncte albastre, deci pe cele k coloane sunt cel puţin $4046-(2023-k)=2023+k$ puncte albastre. .... (**1p**)

Fie A punctul albastru situat pe o anumită coloană, aflat cel mai sus. Distanţele de la A la celelalte puncte albastre de pe aceeaşi coloană pot fi $1\ cm,\ 2\ cm, \ldots, 2022\ cm$, toate aceste distanţe fiind diferite. .... (**1p**)

Dacă c_i reprezintă numărul de puncte albastre de pe coloana C_i, atunci pe coloana C_i vor fi c_i-1 distanţe. .... (**1p**)

Arătăm că există o distanţă care apare pe două coloane diferite.

Deoarece pe cele k coloane avem cel puţin $2023+k$ puncte albastre, rezultă că pe aceste coloane vom avea cel puţin $2023+k-k=2023$ distanţe .... (**1p**)

Deoarece sunt doar 2022 de valori posibile pentru aceste distanţe, rezultă că cel puţin două sunt egale. Punctele albastre care determină cele două distanţe egale sunt vârfurile unui paralelogram .... (**1p**)

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII – a

PROBLEMA 1. Aflaţi numerele prime p care au proprietatea că $2p^2-3p+1$ este pătrat perfect.

Barem de corectare.

Deoarece $2p^2-3p+1=(2p-1)(p-1)$ .... **(2p)** şi $(2p-1,p-1)=1$ .... **(1p)**,

din faptul că $(2p-1)(p-1)$ este pătrat perfect, se obţine că $2p-1$ şi $p-1$ sunt pătrate perfecte. Aşadar, există numerele naturale x şi y, astfel încât $\begin{cases} x^2=2p-1 \\ y^2=p-1 \end{cases}$ .... **(1p)**

de unde obţinem că $\begin{cases} x^2-y^2=p \\ x^2-2y^2=1 \end{cases}$ .... **(1p)**

Din $(x-y)(x+y)=p$, cum p este număr prim, rezultă că $x-y=1$, ... **(1p)**

iar din $2y^2-x^2=-1$ şi $x-y=1$ se obţine că $y\in\{0,2\}$, de unde rezultă că $p=5$... **(1p)**

PROBLEMA 2. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB=12\ cm$ şi $BC==BB'=6\sqrt{2}\ cm$, se consideră mijloacele M şi N ale segmentelor AB, respectiv $C'D'$.

a) Să se demonstreze că $(A'DN)\parallel(B'CM)$;

b) Să se demonstreze că $BD'\perp(B'CM)$;

c) Să se afle distanţa dintre planele $(A'DN)$ şi $(B'CM)$.

Barem de corectare.

a) Deoarece $DN\parallel B'M$ şi $A'D\parallel B'C$, rezultă că $(A'DN)\parallel(B'CM)$ .... **(3p)**

b) Fie $CM\cap BD=\{Q\}$ şi $BD'\cap B'Q=\{S\}$.
Din asemănarea triungiurilor dreptungice $\Delta DAB\sim\Delta MBC$ $\left(\dfrac{AD}{MB}=\dfrac{AB}{CB}=\sqrt{2}\right)$, rezultă că $\widehat{ABD}\equiv\widehat{BCM}$, de unde se obţine că $CM\perp BD$, $CM\perp DD'$, adică $BD'\perp CM$ .. **(1p)**
Deoarece $BD=6\sqrt{6}cm$, iar $BQ=2\sqrt{6}cm$, se obţine că $\dfrac{D'D}{BQ}=\dfrac{BD}{BB'}=\sqrt{3}$. Astfel, din asemănarea triungiurilor dreptungice $\Delta D'DB\sim\Delta QBB'$, $\widehat{D'BD}\equiv\widehat{QB'B}$, de unde $BD'\perp B'Q$. .... **(1p)**
Aşadar, din $BD'\perp CM$ şi $BD'\perp B'Q$, rezultă că $BD'\perp(B'CM)$. .... **(1p)**

c) Deoarece $BQ\parallel B'D'$, $\dfrac{BS}{D'S}=\dfrac{BQ}{B'D'}=\dfrac{1}{3}$, de unde se obţine că $BS=\dfrac{BD'}{4}$. Aşadar, distanţa dintre planele $(A'DN)$ şi $(B'CM)$ este $BD'-2BS=\dfrac{BD'}{2}=6\sqrt{2}cm$. .... **(1p)**

PROBLEMA 3. Să se demonstreze că:

a) $\dfrac{a^2+b^2}{2} > ab$, oricare ar fi a şi b două numere reale diferite;

b) $\dfrac{1}{2\cdot 1^2+2\cdot 1+1}+\dfrac{1}{2\cdot 2^2+2\cdot 2+1}+...+\dfrac{1}{2\cdot 2022^2+2\cdot 2022+1}<\dfrac{1011}{2023}$.

Barem de corectare.

a) Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu $(a-b)^2>0$ .... **(3p)**

b) Deoarece, dacă $a,b>0$ cu $a\neq b$, atunci $\dfrac{1}{a^2+b^2}<\dfrac{1}{2ab}$, ... **(1p)**

$$\sum_{k=1}^{2022}\frac{1}{2k^2+2k+1}=\sum_{k=1}^{2022}\frac{1}{k^2+(k+1)^2}<\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2022}\frac{1}{k(k+1)} \quad\text{............ } \mathbf{(2p)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2022}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2023}\right)=\frac{1011}{2023} \quad\text{............ } \mathbf{(1p)}$$

PROBLEMA 4. Fie A,B,C,D patru puncte necoplanare, E şi F mijloacele segmentelor AC, respectiv BD, astfel încât $AD=BC$, $AC=BD=2\sqrt{15}\ cm$, iar $2EF=AB=CD=2\sqrt{5}\ cm$.

a) Arătaţi că triunghiul DEB este isoscel.

b) Calculaţi distanţa dintre dreptele AC şi BD;

c) Aflaţi măsura unghiului dintre dreptele AC şi BD.

Barem de corectare..

a) Deoarece $\Delta DAC\equiv\Delta BCA$ .... **(1p)**, rezultă că $(BE)\equiv(DE)$ .... **(1p)**

b) Cum (EF) este mediană în triunghiul isoscel ΔBED, $EF\perp BD$. Analog, se atată că $EF\perp AC$ .... **(1p)**

Aşadar, $d(AC,BD)=EF=\sqrt{5}cm$ .... **(1p)**

c) Fie H şi G mijloacele segmentelor (AD), respectiv (BC). Deoarece $EGFH$ este un romb cu latura de $\sqrt{5}$cm şi $EF=d(AC,BD)=\sqrt{5}cm$, obţinem că $HG=\sqrt{15}cm$ .... **(1p)**

Dacă M este mijlocul segmentului (AB), atunci $HM=GM=\sqrt{15}cm$ .... **(1p)**

Aşadar, triunghiul ΔGMH este echilateral şi $m\left(\widehat{AC,BD}\right)=m\left(\widehat{MG,HM}\right)=60^\circ$ .. **(1p)**

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX – a

PROBLEMA 1. Să se determine $m, n \in \mathbb{N}$, astfel încât numărul $\dfrac{\sqrt{m}+\sqrt{5}}{\sqrt{n}+1}$ să fie raţional.

Barem de corectare.

Dacă $\dfrac{\sqrt{m}+\sqrt{5}}{\sqrt{n}+1} = \dfrac{p}{q}$, unde $p, q \in \mathbb{N}^*$, cu $(p, q) = 1$, avem $q\sqrt{5} - p = p\sqrt{n} - q\sqrt{m}$ ..... **(2p)**

de unde, prin ridicare la pătrat, obţinem $\sqrt{mn} - \sqrt{5} = \dfrac{mq^2 + np^2 - p^2 - 5q^2}{2pq} = r \in \mathbb{Q}$ **(2p)**

Din $\sqrt{mn} = r + \sqrt{5}$, rezultă că $(mn - r^2 - 5) - 2r\sqrt{5} = 0$. Cum $mn - r^2 - 5 \in \mathbb{Q}$, obţinem că $mn - r^2 - 5 = 2r = 0$, adică $r = 0$ şi $mn = 5$ .... **(2p)**

de unde $(m, n) \in \{(1, 5),\ (5, 1)\}$, se obţine soluţia $m = 1$ şi $n = 5$ .... **(1p)**

PROBLEMA 2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $[x]^2 + 4x + \{x\} + \sqrt{3} = 0$.

Barem de corectare.

Ecuaţia se scrie echivalent $([x] + 2)^2 = 4 - \sqrt{3} - 5\{x\} \in \mathbb{N}$ .... **(2p)**

Cum $\{x\} \in [0, 1)$, rezultă că $([x] + 2)^2 \in \{0, 1, 2\}$ .... **(3p)**

Pentru $[x] + 2 = 0$ se obţine soluţia $x = \dfrac{-6-\sqrt{3}}{5}$, iar pentru $[x] + 2 = \pm 1$ se obţin soluţiile $x = \dfrac{-2-\sqrt{3}}{5}$ şi $x = \dfrac{-12-\sqrt{3}}{5}$ .... **(2p)**

PROBLEMA 3. Să se arate că:

a) Dacă $a, b, c \in (0, +\infty)$, atunci are loc inegalitatea $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$;

b) Dacă $a, b, c \in (0, +\infty)$, atunci are loc inegalitatea

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}+2\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}+2\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+2\sqrt{b}} \geq 1.$$

Barem de corectare.

a) Inegalitatea se poate scrie echivalent $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 + (\sqrt{a}-\sqrt{c})^2 + \left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2 \geq 0$ .. **(2p)**

b) Avem:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}+2\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}+2\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+2\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a})^2}{\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}} + \frac{(\sqrt{b})^2}{\sqrt{bc}+2\sqrt{ab}} + \frac{(\sqrt{c})^2}{\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}} \ldots \textbf{(2p)}$$

$$\geq \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{3\left(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\right)} \geq 1 \ldots\ldots \textbf{(3p)}$$

PROBLEMA 4. Fie triunghiul ABC cu laturile de lungimi $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ şi $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$ picioarele bisectoarelor unghiurilor triunghiului.

Să se arate că:

a) $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{b}{b+c} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{AC}$;

b) Triunghiul ABC este echilateral, dacă şi numai dacă $a \cdot \overrightarrow{AA'} + b \cdot \overrightarrow{BB'} + c \cdot \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$.

Barem de corectare.

a) Din teorema bisectoarei, $\dfrac{A'B}{A'C} = \dfrac{c}{b}$, de unde obţinem $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{b}{b+c} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{AC}$...(**3p**)

b) Analog, avem $\overrightarrow{BB'} = \dfrac{c}{a+c} \cdot \overrightarrow{BC} + \dfrac{a}{a+c} \cdot \overrightarrow{BA}$ şi $\overrightarrow{CC'} = \dfrac{a}{a+b} \cdot \overrightarrow{CA} + \dfrac{b}{a+b} \cdot \overrightarrow{CB}$. Astfel, $a \cdot \overrightarrow{AA'} + b \cdot \overrightarrow{BB'} + c \cdot \overrightarrow{CC'} = \dfrac{b\left(a^2 - b^2 + c^2 - ac\right)}{(b+c)(a+b)} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{c\left(a^2 + b^2 - c^2 - ab\right)}{(b+c)(a+c)} \cdot \overrightarrow{AC}$ ... (**2p**)

Aşadar, din $a \cdot \overrightarrow{AA'} + b \cdot \overrightarrow{BB'} + c \cdot \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$ rezultă că $a^2 - b^2 + c^2 - ac = a^2 + b^2 - c^2 - ab = 0$, de unde $a = b = c$ .... (**1p**), iar din $a = b = c$ se obţine că $a \cdot \overrightarrow{AA'} + b \cdot \overrightarrow{BB'} + c \cdot \overrightarrow{CC'} = \dfrac{a}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{0}$ .... (**1p**)

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X – a

PROBLEMA 1.

a) Să se determine valorile lui $z \in \mathbb{C}$, pentru care $z^2 + 2|z|^2 - 4 = 0$.

b) Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ şi $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, astfel încât $az^2 + bz + c = 0$, atunci $|z| < 2\left|\frac{c}{b}\right|$.

Barem de corectare.

a) Fie $z = x + yi$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

Ecuaţia dată se poate scrie $(3x^2 + y^2 - 4) + 2xyi = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + y^2 - 4 = xy = 0$,....... **(1p)**

de unde se obţin soluţiile soluţiile $z = \pm 2i$ .... **(1p)** şi $z = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .... **(1p)**

b) Deoarece rădăcinile ecuaţiei $az^2 + bz + c = 0$ sunt $z, \overline{z} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, din relaţiile lui Viète avem $z + \overline{z} = -\frac{b}{a}$ şi $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = \frac{c}{a}$.. **(2p)**

Aşadar, $\left|\frac{b}{a}\right| \cdot |z| = |z + \overline{z}| \cdot |z| < (|z| + |\overline{z}|) \cdot |z| = 2|z|^2 = 2\frac{c}{a} = 2\left|\frac{c}{a}\right| \Rightarrow |z| < 2\left|\frac{c}{b}\right|$ .... **(2p)**

PROBLEMA 2. Să se arate că dacă $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, atunci:

a) $\sqrt{2} \le |1 - z| + |1 + z^2| \le 4$;

b) $2 \le |z + 1| + |z - 1| \le 2\sqrt{2}$.

Barem de corectare.

a) Dacă notăm $x = |1 - z|$, atunci $x \in [0, 2]$ şi $x^2 = 2 - 2 \cdot \operatorname{Re} z$, de unde $\operatorname{Re} z = \frac{2 - x^2}{2}$. **(1p)**

Pe de altă parte, $|1 + z^2|^2 = 4 \cdot (\operatorname{Re} z)^2$, adică $|1 + z^2| = |2 - x^2|$...................... **(1p)**

Inegalitatea din enunţ rezultă din faptul că funcţia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + |2 - x^2|$ are valoarea minimă egală cu $\sqrt{2}$ şi valoarea maximă egală cu 4. .... **(2p)**

b) Fie cercul de centru O şi rază 1 şi punctele $A(z)$, $M(-1)$ şi $N(1)$.

Deoarece AO este mediană în triunghiul AMN, obţinem că $2 = 2 \cdot AO < AM + AN = |z + 1| + |z - 1|$.. **(1p)**

Din triunghiul dreptunghic AMN, $AM^2 + AN^2 = 4$, de unde, din inegalitatea mediilor, obţinem că $|z + 1| + |z - 1| = AM + AN \le 2\sqrt{\frac{AM^2 + AN^2}{2}} = 2\sqrt{2}$................. **(2p)**

PROBLEMA 3. Să se determine valorile reale ale lui x, pentru care $2\sqrt[3]{2x-1} = x^3 + 1$.

Barem de corectare.

Deoarece funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$ este bijectivă................ **(2p)**

cu inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f^{-1}(x) = \dfrac{x^3+1}{2}$,................................ **(1p)**

ecuaţia se poate scrie $f(x) = f^{-1}(x)$, sau echivalent $f(x) = x$........................ **(2p)**

Obţinem astfel ecuaţia $x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1) = 0$...................... **(1p)**

cu soluţiile 1 şi $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.. **(1p)**

PROBLEMA 4. Să se determine funcţiile $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, care satisfac condiţiile:

a) $f(x) \leq \ln x, \ \forall\, x \in (0, +\infty)$;

b) $f(x \cdot y) \leq f(x) + f(y), \ \forall\, x, y \in (0, +\infty)$.

Barem de corectare..

Deoarece $f(1) \leq \ln 1 = 0$, respectiv $f(1) = f(1 \cdot 1) \leq f(1) + f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) \geq 0$, obţinem că $f(1) = 0$ .... **(2p)**

Pentru orice $x \in (0, +\infty)$, avem

$0 = f(1) = f\left(x \cdot \dfrac{1}{x}\right) \leq f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq \ln x + \ln \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$,...... **(2p)**

de unde $f(x) = -f\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq -\ln \dfrac{1}{x} = \ln x$, adică $f(x) = \ln x$......................... **(2p)**

Funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ verifică condiţiile a) şi b) din enunţ .... **(1p)**

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 25. 02. 2023
BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI – a

PROBLEMA 1. Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, astfel încât $\det(A+B) = \det B \neq 0$ şi $\operatorname{tr}(AB^{-1}) \neq 0$. Arătaţi că matricea A este inversabilă.

Barem de corectare.

Deoarece $\det(C - xI_2) = x^2 - \operatorname{tr} C \cdot x + \det C$, $\forall\, C \in M_2(\mathbb{C})$ .... **(1p)**

avem $\det((A+B) \cdot B^{-1}) = \det(AB^{-1} + I_2) = 1 + \operatorname{tr}(AB^{-1}) + \det(AB^{-1})$ .... **(3p)**

de unde $\operatorname{tr}(AB^{-1}) + \det(A) \cdot \det(B^{-1}) = \det(A+B) \cdot \det(B^{-1}) - 1 = 0$............. **(1p)**

Aşadar, $\det(A) \cdot \det(B^{-1}) = -\operatorname{tr}(AB^{-1}) \neq 0 \Rightarrow \det(A) \neq 0$, adică A este inversabilă. **(2p)**

PROBLEMA 2. Să se determine numărul $a > 0$, ştiind că partea întreagă a numărului $(n^2 - n)(\sqrt[n]{a} - 1)$ este egală cu $n - 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Barem de corectare. Fie $x_n = (n^2 - n)(\sqrt[n]{a} - 1)$.

Din $[x_n] = n - 1 \Leftrightarrow n - 1 \leq (n^2 - n)(\sqrt[n]{a} - 1) < n \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{n} \leq (n-1)(\sqrt[n]{a} - 1) < 1$.... **(3p)**

obţinem că $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1)(\sqrt[n]{a} - 1) = 1 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$.......................... **(2p)**

Deoarece pentru orice $n \geq 2$, avem

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \Leftrightarrow n - 1 \leq \left(n^2 - n\right)\left(\sqrt[n]{e} - 1\right) < n,$$

rezultă că $[(n^2 - n)(\sqrt[n]{e} - 1)] = n - 1$, pentru orice $n \in N$, $n \geq 2$..................... **(2p)**

PROBLEMA 3. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2023!}{(k+1)(k+2)\ldots(k+2023)}$; b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x$.

Barem de corectare.

a) Dacă $S_n = 2023! \cdot \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)\ldots(k+2023)}$, atunci din

$$S_n = \frac{2023!}{2022} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k+1)(k+2)\ldots(k+2022)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)\ldots(k+2023)}\right) \text{......... } \mathbf{(2p)}$$

$$= \frac{2023!}{2022} \cdot \left(\frac{1}{2023!} - \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+2023)}\right) \text{.................. } \mathbf{(1p)}$$

rezultă că $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{1}{2022}$ .... **(1p)**

b) Deoarece avem cazul de nedeterminare 1^∞, avem

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sin\frac{1}{x}-2\sin^2\frac{1}{2x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sin\frac{1}{x}-2\sin^2\frac{1}{2x}\right)},\ \ldots\ (\mathbf{2p})$$

iar din $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sin\frac{1}{x}-2\sin^2\frac{1}{2x}\right)=1$, obţinem că $L=e$. .... **(1p)**

PROBLEMA 4.

a) Fie matricele $A,B\in M_2(\mathbb{C})$. Să se determine numerele x şi y, ştiind că

$$AB=\begin{pmatrix} x & 7\\ 18 & 7\end{pmatrix}\ \text{şi}\ BA=\begin{pmatrix} 1 & 10\\ 3 & y\end{pmatrix}.$$

b) Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$, cu $a\in(0,1)$ şi $b\in\mathbb{R}$.

(i) Să se arate că există două şiruri de numere reale $(a_n)_{n\geq1}$ şi $(b_n)_{n\geq1}$, cu proprietatea că $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n\\ 0 & a_n\end{pmatrix}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$;

(ii) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_1+a_2+...+a_n)$ şi $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$.

Barem de corectare.

a) Din $\det(AB)=\det(BA)\Leftrightarrow 7x-126=y-30\Leftrightarrow 7x-y=96$ .... **(1p)**

şi din $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)\Leftrightarrow x+7=1+y\Leftrightarrow x-y=-6$ .... **(1p)**

obţinem că $x=17$ şi $y=23$. .... **(1p)**

b) Se demonstrează prin inducţie matematică că $A^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b\\ 0 & a^n\end{pmatrix}$, adică $a_n=a^n$ şi $b_n=na^{n-1}b$ .... **(2p)**

Obţinem astfel că $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_1+a_2+...+a_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}a\cdot\dfrac{a^n-1}{a-1}=\dfrac{a}{1-a}$ .... **(1p)**

şi $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}na^{n-1}b=0$ .... **(1p)**

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII – a

PROBLEMA 1. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e şi $a \in G \setminus \{e\}$ un element cu proprietatea că $x = a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot a^{2023}$, pentru orice $x \in G$.

a) Să se determine ordinul lui a în grupul G;

b) Să se demonstreze că grupul G este abelian.

Barem de corectare.

a) Din $e = a^{-1} \cdot e^{-1} \cdot a^{2023}$, rezultă că $a^{2022} = e$, ... **(2p)**

iar din $a = a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a \Leftrightarrow a = a^{-1}$, obţinem că $a^2 = e$, adică $\operatorname{ord} a = 2$.. .... **(2p)**

Astfel, relaţia din enunţ se mai poate scrie $x = a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot a, \quad \forall\, x \in G$.

b) Pentru orice elemente $x, y \in G$, avem $xy = a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot a \cdot a^{-1} \cdot y^{-1} \cdot a = a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot a = a^{-1} \cdot (yx)^{-1} \cdot a = yx$, de unde rezultă că grupul G este abelian. .... **(3p)**

PROBLEMA 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit, $f : G \to G$ un automorfism al lui G şi funcţia $h : G \to G$, definită prin $h(x) = x^{-1} f(x)$.

a) Să se demonstreze că f are un singur punct fix, dacă şi numai dacă funcţia h este bijectivă;

b) Să se demonstreze că dacă f are un singur punct fix şi $f \circ f = 1_G$, atunci grupul G este comutativ.

Notă. Un element $a \in G$ se numeşte punct fix al funcţiei $f : G \to G$, dacă $f(a) = a$. Despre un morfism de grupuri $f : G \to G$ se spune că are un singur punct fix, dacă $f(x) = x \Leftrightarrow x = e$.

Barem de corectare.

a) Să presupunem că f are un singur punct fix. Atunci, dacă $x_1, x_2 \in G$ cu $h(x_1) = h(x_2)$, avem $x_1^{-1} f(x_1) = x_2^{-1} f(x_2) \Rightarrow f(x_1) f\left(x_2^{-1}\right) = x_1 x_2^{-1} \Rightarrow f\left(x_1 x_2^{-1}\right) = x_1 x_2^{-1} \Rightarrow x_1 x_2^{-1} = e \Rightarrow x_1 = x_2$, adică h este injectivă. Cum G este un grup finit, rezultă că funcţia h este bijectivă.. .... **(3p)**

Reciproc, dacă h este bijectivă, iar $x \in G$ este un punct fix al funcţiei f, atunci $h(x) = x \Rightarrow x^{-1} f(x) = e \Rightarrow h(x) = e = h(e) \Rightarrow x = e$... .... **(1p)**

b) Din ipoteză, pe baza punctului a), rezultă că pentru orice $x \in G$, există un element $y \in G$, astfel încât $x = h(y) = y^{-1} f(y)$. Astfel, avem $f(x) = f\left(y^{-1} f(y)\right) = f\left(y^{-1}\right) \cdot (f \circ f)(y) = (f(y))^{-1} \cdot y = \left(y^{-1} f(y)\right)^{-1} = x^{-1}$.. **(2p)**

de unde, $f(xy) = f(x) f(y) \Rightarrow (xy)^{-1} = x^{-1} y^{-1} \Rightarrow y^{-1} x^{-1} = x^{-1} y^{-1} \Rightarrow xy = yx$, adică G este comutativ.. **(1p)**

PROBLEMA 3. Să se calculeze:

a) $I = \displaystyle\int \frac{x\left(x^2+1\right)}{x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1} dx, \quad x \in (1, +\infty)$;

b) $J = \displaystyle\int_a^b \frac{c + a \sin^n x + b \cos^n x}{4c + \pi\left(\sin^n x + \cos^n x\right)} dx$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, $c > 0$, iar $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ cu $a + b = \frac{\pi}{2}$.

Barem de corectare.

a) $I = \displaystyle\int \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^3} dx = \int \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)'}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^3} dx = \frac{-x^2}{2\left(x^2-1\right)^2} + C$.......................... **(3p)**

b) Din $J = \displaystyle\int_a^b \frac{c + a \sin^n x + b \cos^n x}{4c + \pi\left(\sin^n x + \cos^n x\right)} dx \overset{\frac{\pi}{2} - x = t}{=} \int_a^b \frac{c + b \sin^n t + a \cos^n t}{4c + \pi\left(\sin^n t + \cos^n t\right)} dt$.............. **(2p)**

avem $2J = \displaystyle\int_a^b \frac{2c + (a+b)\left(\sin^n x + \cos^n x\right)}{4c + \pi\left(\sin^n x + \cos^n x\right)} dx = \int_a^b \frac{1}{2} dx = \frac{b-a}{2}$, adică $J = \dfrac{b-a}{4}$..... **(2p)**

PROBLEMA 4. Considerăm şirul $\left(I_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, definit prin $I_0 = \frac{\pi}{4}$ şi $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x \, dx$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

a) $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

b) şirul $\left(I_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ este descrescător, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$ şi $\lim\limits_{n \to +\infty} n I_n = \dfrac{1}{4}$;

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Barem de corectare.

a) Evident, $I_0 + I_1 = 1$, iar pentru $n \geq 1$, $I_n + I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x \cdot \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) \, dx = \int_0^1 t^{2n} \, dt = \frac{1}{2n+1}$.. **(2p)**

b) Cum$I_1 - I_0 \leq 0$ şi $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x \cdot \left(\operatorname{tg}^2 x - 1\right) \, dx \leq 0$, pentru $n \geq 1$, rezultă că şirul este descrescător... **(1p)**

Din $0 \leq I_n \leq I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$, rezultă că $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$,.......................... **(1p)**

iar din $\dfrac{1}{2n+1} = I_n + I_{n+1} \leq 2I_n \leq I_{n-1} + I_n = \dfrac{1}{2n-1}$ obţinem că $\dfrac{n}{2(2n+1)} \leq n I_n \leq \dfrac{n}{2(2n-1)}$, adică $\lim\limits_{n \to +\infty} n I_n = \dfrac{1}{4}$... **(1p)**

c) Deoarece

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (I_k + I_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{k+1} = I_0 + (-1)^n I_{n+1} \ldots \textbf{(1p)}$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right) = \lim\limits_{n\to+\infty} (I_0 + (-1)^n I_{n+1}) = I_0 = \frac{\pi}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **(1p)**

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.