OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 25. 02. 2023
BAREM DE CORECTARE - Clasa a V – a

PROBLEMA 1. Să se afle suma numerelor naturale a, b, c, d, e pentru care, în fiecare dintre perechile de mai jos, diferenţa posibilă între numere este cea mai mică:

$$(3a, 2023), \quad (7b+5, 2023), \quad (13c+5, 2023), \quad \left(d^2, 2023\right), \quad (2^e, 2023).$$

(De exemplu, pentru perechea $(4, 9)$, diferenţa posibilă este $9-4$, iar în perechea $(14, 9)$, diferenţa posibilă este $14-9$.)

Barem de corectare. Avem:

$2023 = 3 \cdot 674 + 1 \Rightarrow a = 674$ .... (**1p**)

$2023 = 7 \cdot 289 \Rightarrow b = 288$ .... (**1p**)

$2023 = 13 \cdot 155 + 8 \Rightarrow c = 155$ ...... (**2p**)

$2025 = 45^2 \Rightarrow d = 45$ .... (**1p**)

$2048 = 2^{11} \Rightarrow e = 11$ .... (**1p**)

Suma cerută este $a + b + c + d + e = 1173$. .... (**1p**)

PROBLEMA 2. Cu cifrele $1, 2, 3$ şi 4 se formează două numere diferite, având fiecare patru cifre distincte. Arătaţi că niciunul dintre aceste numere nu se divide cu celălalt.

Barem de corectare.

Fie a şi b cele două numere. Deoarece $1 + 2 + 3 + 4 = 10 = 3 \cdot 3 + 1$, rezultă că $a = 3k + 1$ şi $b = 3l + 1$, unde $k, l \in \mathbb{N}^*$. .... (**3p**)

Pentru fixare să luăm $a < b$. Cel mai mic număr format cu aceste cifre este 1234, iar cel mai mare este 4321; rezultă că $b < 4a$. .... (**1p**)

Cum $0 < a < b$, avem doar posibilitatea $a|b$, de unde $b = 2a$ sau $b = 3a$. .... (**1p**)

Dacă $b = 2a$, atunci $3l + 1 = 2(3k + 1)$, de unde se obţine $3(l - 2k) = 1$, imposibil. ... (**1p**)

Dacă $b = 3a$, atunci $3|b$, imposibil. .... (**1p**)

PROBLEMA 3.

a) Scrieţi numărul 252525 ca sumă de 6 pătrate perfecte distincte nenule.

b) Demonstraţi că există cel puţin 27 de numere de forma $\underbrace{\overline{abab\ldots ab}}_{2022\ cifre}$ care se pot scrie ca sumă de 2022 pătrate perfecte distincte nenule.

Barem de corectare.

a) Numărul 252525 se poate scrie astfel:

$$252525 = 25\cdot 10^4 + 25\cdot 10^2 + 25 = 25\left(10^4+10^2+1\right) = (3^2+4^2)\left(10^4+10^2+1\right)$$
$$= 3^2\cdot\left(10^4+10^2+1\right) + 4^2\cdot\left(10^4+10^2+1\right)$$
$$= \left(3\cdot 10^2\right)^2 + (3\cdot 10)^2 + 3^2 + \left(4\cdot 10^2\right)^2 + (4\cdot 10)^2 + 4^2$$ .... **(2p)**

b) Numărul din enunţ se scrie astfel:

$$\overline{ab}\cdot 10^{2020} + \overline{ab}\cdot 10^{2018} + \cdots + \overline{ab} = \overline{ab}\cdot\left(10^{2020}+10^{2018}+\cdots+1\right).$$

În continuare vom determina acele numere $\overline{ab}$ care se pot exprima ca sumă de două pătrate perfecte distincte. .... **(2p)**

Avem următoarele posibilităţi: .... **(2p)**

$1^2+3^2=10$	$2^2+3^2=13$	$3^2+4^2=25$	$4^2+5^2=41$	$5^2+6^2=61$	$\boxed{6^2+7^2=85}$
$1^2+4^2=17$	$2^2+4^2=20$	$3^2+5^2=34$	$4^2+6^2=52$	$5^2+7^2=74$	
$1^2+5^2=26$	$2^2+5^2=29$	$3^2+6^2=45$	$\boxed{4^2+7^2=65}$	$5^2+8^2=89$	
$1^2+6^2=37$	$2^2+6^2=40$	$3^2+7^2=58$	$4^2+8^2=80$		
$1^2+7^2=50$	$2^2+7^2=53$	$3^2+8^2=73$	$4^2+9^2=97$		
$\boxed{1^2+8^2=65}$	$2^2+8^2=68$	$3^2+9^2=90$			
$1^2+9^2=82$	$\boxed{2^2+9^2=85}$				

Aşadar, există cel puţin $(7+7+6+5+3+1)-2=27$ de astfel de numere .... **(1p)**

PROBLEMA 4. Pe o tablă sunt scrise trei numere naturale nenule distincte.

- Andra împarte cele trei numere de pe tablă la 6 şi obţine resturi egale cu 1 sau cu 3;
- Carla adună două câte două numere de pe tablă şi împarte de fiecare dată rezultatul la 6, obţinând resturi egale cu 0 sau cu 4, cel puţin câte un rest din fiecare;
- Matei adună toate numerele de pe tablă şi împarte suma la 6.

a) Ce rest a obţinut Matei?

b) Aflaţi numerele scrise pe tablă, ştiind că suma celor mai mici două numere de pe tablă este 82, iar suma celor mai mari două numere de pe tablă este 96.

Barem de corectare.

a) Fie a, b şi c cele trei numere. Resturile obţinute de Andra prin împărţirea la 6 pot fi doar 1 sau 3. Dacă două dintre numere dau restul 1 prin împărţirea la 6, atunci restul împărţirii sumei lor la 6 va fi egal cu 2, imposibil, deoarece Carla a obţinut doar 0 sau 4 ca rest. De asemenea, nu este posibil ca toate cele trei numere să dea restul 3 prin împărţirea la 6, deoarece Carla nu ar obţine şi restul 4. Astfel rezultă că două dintre numere dau restul 3 prin împărţirea la 6, iar cel de-al treilea dă restul 1 prin împărţirea la 6. ....(**3p**)

   Fie, de exemplu, $a = 6x+3,\ \ b = 6y+3,\ \ c = 6z+1$.Rezultă că $a+b+c = 6(x+y+z)+7 = 6(x+y+z+1)+1$, adică restul obţinut de Matei este egal cu 1.....................(**1p**)

b) Observăm că nu se poate ca a şi b să fie cele mai mici numere, deoarece $6|a+b$, deci $a+b \neq 82$. Dacă $a+c = 82$ (cazul $b+c = 82$ este analog), atunci $6(x+z) = 78$, deci $x+z = 13$. Observăm că a şi b sunt cele mai mari numere, de unde $x+y = 15$..................(**2p**)

   Ordinea numerelor este $c < a < b$, de unde $z \leq x < y$. Soluţiile sunt: $x = 7$, $y = 8$, $z = 6$ de unde $a = 45$, $b = 51$, $c = 37$...(**1p**)

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2023

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI – a

PROBLEMA 1. Fie $n \in \mathbb{N}$. În jurul punctului O se construiesc unghiurile A_1OA_2, A_2OA_3, $A_3OA_4, ...,$ $A_{23}OA_1$, astfel încât $\sphericalangle A_1OA_2 = 1\,^\circ$, $\sphericalangle A_2OA_3 = 2\,^\circ$, $\sphericalangle A_3OA_4 = 3\,^\circ, ..., \sphericalangle A_{22}OA_{23} = 22\,^\circ$, iar $\sphericalangle A_{23}OA_1 = n\,^\circ$. Să se arate că:

a) $\sphericalangle A_{23}OA_1$ este unghi obtuz;

b) bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A_{12}OA_{13}$ şi $\sphericalangle A_{18}OA_{19}$ sunt perpendiculare;

c) OA_5 şi OA_{20} sunt semidrepte opuse.

Barem de corectare.

a) Deoarece $\sphericalangle A_1OA_2 + \sphericalangle A_2OA_3 + ... + \sphericalangle A_{22}OA_{23} = 1\,^\circ + 2\,^\circ + ... + 22\,^\circ = 253\,^\circ$, ... **(1p)**

rezultă că $\sphericalangle A_{23}OA_1 = 360\,^\circ - 253\,^\circ = 107\,^\circ$, adică $\sphericalangle A_{23}OA_1$ este un unghi obtuz; ... **(2p)**

b) Fie semidreptele OB şi OC bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A_{12}OA_{13}$, respectiv $\sphericalangle A_{18}OA_{19}$. Deoarece $\sphericalangle BOA_{13} = 6\,^\circ$, iar $\sphericalangle A_{18}OC = 9\,^\circ$ .... **(1p)**

obţinem că $\sphericalangle BOC = 6\,^\circ + 13\,^\circ + 14\,^\circ + 15\,^\circ + 16\,^\circ + 17\,^\circ + 9\,^\circ = 90\,^\circ$ .... **(1p)**

c) Deoarece $\sphericalangle A_5OA_{20} = 5\,^\circ + 6\,^\circ + 7\,^\circ + ... + 19\,^\circ = 180\,^\circ$, rezultă că semidreptele OA_5 şi OA_{20} sunt opuse .... **(2p)**

PROBLEMA 2. Fie x şi y două numere naturale nenule, pentru care $\dfrac{x+5}{y} = \dfrac{x}{y-7}$.

a) Să se demonstreze că $5|x$ şi $7|y$;

b) Să se determine cea mai mare valoare posibilă a raportului $\dfrac{y}{x}$.

Barem de corectare.

a) Din $\dfrac{x+5}{x} = \dfrac{y}{y-7} \Leftrightarrow \dfrac{5}{x} = \dfrac{7}{y-7}$, se obţine $5y - 35 = 7x$. .... **(2p)**

de unde rezultă că $5|x$ şi $7|y$ .... **(2p)**

b) Din $5y = 7x + 35$ se obţine $\dfrac{y}{x} = \dfrac{7}{x} + \dfrac{7}{5}$ .... **(2p)**

Cea mai mare valoare a raportului $\dfrac{y}{x}$ se obţine pentru cea mai mică valoare posibilă a lui x, adică $x = 5$. Obţinem de aici că $y = 14$ şi valoarea maximă a raportului $\dfrac{y}{x}$ este $\dfrac{14}{5}$. ... **(1p)**

PROBLEMA 3. Profesorul de matematică scrie pe tablă cifrele: $1, 1, 1, 8, 8, 8$. Alexandra iese la tablă şi scrie toate numerele de 6 cifre, aşa încât în fiecare număr să apară toate cifrele scrise de profesor pe tablă.

a) Să se arate că suma numerelor scrise de Alexandra este divizibilă cu 63;

b) Aflaţi cel mai mare divizor comun al numerelor scrise de Alexandra pe tablă.

Barem de corectare.

a) Deoarece $1+1+1+8+8+8=27$, rezultă că fiecare număr scris de Alexandra pe tablă se divide cu 9 .... **(2p)**

Dacă x este un număr scris de Alexandra pe tablă, atunci numărul $x-111111$ are toate cifrele 0 şi 7, adică se divide cu 7. Cum $111111 = 7 \cdot 15\,873$, obţinem că şi numărul x se divide cu 7 .... **(2p)**

Aşadar, toate numerele scrise de Alexandra se divid cu 63, de unde rezultă că şi suma acestora se divide cu 63 .... **(1p)**

b) Dacă d este cel mai mare divizor comun al numerelor scrise pe tablă, atunci din $d|181881$ şi $d|181818$ rezultă că $d|\,(181881-181818)$, adică $d|63$ .... **(1p)**

Dar, cum toate aceste numere se divid cu 63, rezultă că $63|d$, adică $d=63$ .... **(1p)**

PROBLEMA 4. Tatăl lui Andrei are într-o urnă 36 de bile, numerotate de la 1 la 36 şi extrage la întâmplare 6 dintre ele. Andrei are la dispoziţie 9 cartonaşe şi trebuie să scrie pe fiecare câte 6 numere dintre numerele naturale de la 1 la 36. Un cartonaş se numeşte câştigător dacă nu conţine nici unul dintre cele 6 numere extrase de tatăl său. Pentru a ieşi la joacă, Andrei trebuie să aibă cel puţin un cartonaş câştigător. Poate găsi Andrei o strategie să meargă la joacă? Justificaţi răspunsul.

Barem de corectare. O strategie posibilă pentru Andrei este următoarea:

- El împarte numerele în 9 grupe, astfel:

G1: $1,2,3$	G4: $10,11,12$	G7: $19,20,21,22,23,24$	
G2: $4,5,6$	G5: $13,14,15$	G8: $25,26,27,28,29,30$	.... **(1p)**
G3: $7,8,9$	G6: $16,17,18$	G9: $31,32,33,34,35,36$	

- Apoi, împarte cartonaşele în 3 categorii şi scrie pe ele astfel:

Categoria I	primul cartonaş conţine numerele din G1 şi G2	
	al doilea conţine numerele din G1 şi G3	
	al treilea conţine numerele din G2 şi G3	
Categoria II	primul cartonaş conţine numerele din G4 şi G5	
	al doilea conţine numerele din G4 şi G6	....................**(1p)**
	al treilea conţine numerele din G5 şi G6	
Categoria III	primul cartonaş conţine numerele din G7	
	al doilea conţine numerele din G8	
	al treilea conţine numerele din G9	

Analizăm cazul cel mai puţin favorbil pentru Andrei:

- Pentru ca niciunul dintre cartonaşele din categoria I să nu fie câştigător, trebuie ca minim două dintre bilele extrase să fie numerotate cu numere din grupele G1, G2, G3. ..... (**1p**)
- Analog pentru cartonaşele din categoria II. .... (**1p**)
- Deci, pentru ca niciunul dintre cartonaşele din categoriile I şi II să nu fie câştigător, trebuie ca minim 4 dintre numerele de pe bilele extrase să fie de la 1 până la 18.
- Pentru ca niciunul dintre cartonaşele din categoria III să nu fie câştigător, trebuie ca fiecare cartonaş din această categorie să conţină minim un număr dintre cele extrase din urnă. Ar rezulta 7 numere, dar s-au extras doar 6. .... (**2p**)

În concluzie, indiferent care bile vor fi extrase, Andrei va merge la joacă. .... (**1p**)

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.