OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a XI –a

1. FELADAT

Adott az $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^*)$ mátrix, $n \in \mathbb{N}$ páratlan szám

Ha $A \cdot A^t = I_n$, mutassátok ki, hogy $det(A^2 - I_n) = 0$, ahol A^t az A mátrix transzponáltja

2. FELADAT

Tekintsük az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatot, ahol $a_1 \in (0,1)$ és $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$ bármely $n \geq 1$ esetén. Számítsátok ki:

$$a.)\ \lim_{n\to\infty} a_n \qquad b.)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

3. FELADAT

Határozzátok meg az összes olyan $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$ halmazt, amelyek rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

i.) $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *nem szingulárisak*;
ii.) $\forall\, X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow XY \in \mathcal{A}$.

4. FELADAT

Legyen $f, g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ két monoton függvény. Mutassátok ki, hogy létezik $c \in (0,1]$ amelyre:

$$f(c) + g(c) \neq \sin\frac{1}{c}$$

Megjegyzés:

[1] *Munkaidő 3 óra;*
[2] *Minden feladat kötelező;*
[3] *Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak;*