OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a X –a

1. FELADAT

Adottak a $z_1, z_2, ..., z_{2020}$ komplex számok, melyek modulusza 1 és $z_1 + z_2 + ... + z_{2020} = 0$.

Mutassátok ki, hogy $\sum_{k=1}^{2020} |z - z_k| \geq 2020 \ \forall \, z \in \mathbb{C}$.

2. FELADAT

Határozzátok meg az $x, y \in (0, +\infty)$ számokat úgy, hogy:

$$\lg^2\left(\frac{x}{y}\right) = 3 \lg\left(\frac{x}{2020}\right) \cdot \lg\left(\frac{2020}{y}\right)$$

3. FELADAT

Oldjátok meg a következő egyenletet az $\mathbb{R}$-en: $\sqrt[5]{4x-5} + \sqrt[5]{x-2} = \sqrt[5]{2x-1}$.

4. FELADAT

Határozzátok meg azt az $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ függvényt, amely egyszerre teljesíti a következő két feltételt:

a) $f(x) \leq 5^x \quad \forall \, x \in \mathbb{R}$

b) $f(x+y) \leq f(x) \cdot f(y) \quad \forall \, x, y \in \mathbb{R}$

Megjegyzés:

[1] *Munkaidő 3 óra;*
[2] *Minden feladat kötelező;*
[3] *Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak;*