OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a XI –a

PROBLEMA 1.

$Fie\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^*), n \in \mathbb{N}\ impar$

$Dacă\ A \cdot A^t = I_n, arătați\ că\ det(A^2 - I_n) = 0, unde\ A^t\ este\ transpusa\ maticei\ A$

PROBLEMA 2.

Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ $cu\ a_1 \in (0,1)$ $și\ a_{n+1} = 2^{a_n} - 1\ pentru\ n \geq 1.$ Să se calculeze:

$$a.)\ \lim_{n\to\infty} a_n \qquad b.)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

PROBLEMA 3.

Determinați toate mulțimile $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$ cu proprietățile:

i.) $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ nesingulare;$
ii.) $\forall\, X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow XY \in \mathcal{A}.$

PROBLEMA 4.

Fie $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ două funcții monotone. Să se arate că există $c \in (0,1]$ astfel încât:

$$f(c) + g(c) \neq \sin\frac{1}{c}$$

Notă:

[1]*Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;*
[2]*Toate problemele sunt obligatorii;*
[3]*Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;*