



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a V –a

1. FELADAT

Az x egy 7 jegyű szám, amelyben a 0, 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számjegyek szerepelnek, a következő tulajdonságokkal:

- i) Az x szám minden számjegye pontosan egyszer szerepel a számban;
- ii) Az x szám bármely három egymás után következő számjegyének összege osztható hárommal;
- iii) Az x szám bármely két szomszédos számjegye különböző paritású (páros/páratlan);
- iv) Az x szám első két számjegye által alkotott szám prímszám.

Határozzátok meg az x számot.

2. FELADAT

Határozzátok meg a $4^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)\dots(a_{2019}+a_1)} - 1$ szám utolsó számjegyét, ha $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2019}$ nullától különböző természetes számok.

3. FELADAT

Határozzátok meg az a, b, c, x, y számjegyeket, tudva, hogy $\overline{abc} + \overline{ab} + c = \overline{cxya}$

4. FELADAT

Legyen n egy nullától különböző természetes szám és S_n az első n páratlan, 5-tel nem osztható természetes szám összege.

- a.) Mutassátok ki hogy, ha n osztható 4-gyel, akkor S_n osztható $5n$ -nel.
- b.) Határozzátok meg az S_{2020} összeg 2021-gyel való osztási maradékát.

Megjegyzés:

¹ Munkaidő 2 óra;

² Minden feladat kötelező;

³ Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak;



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a VI –a

1. FELADAT

Az O pot köré felvesszük a következő szögeket: BOC, COD, DOA és AOB.

Tudva, hogy a COD és a DOA szögek szögfelezői által alkotott szög mértéke 95° , a COD szög mértéke két harmada az AOD szög mértékének és az AOB szög pótszöge egyenlő a BOC szög kiegészítő szögével, határozzátok meg a COD, DOA, AOB és BOC szögek mértékét.

2. FELADAT

- Adott az $n = 2020^3$ természetes szám.
 - Bontsátok fel az n számot törzstényezőik szorzatára.
 - Mutassátok ki, hogy az n szám osztói közül bárhogy választunk ki 9 természetes számot, lesz köztük kettő, melyek szorzata teljes négyzet.
 - Határozzátok meg a legkisebb nullától különböző m természetes számot úgy, hogy akárhogy választanánk ki m darabot az n osztói közül, lesz köztük kettő olyan, melyek szorzata nem teljes négyzet.

3. FELADAT

Adottak a következő halmazok $A = \{ 3p+2 \mid p \in \mathbb{N} \}$, $B = \{ 5k+4 \mid k \in \mathbb{N} \}$ és $C = \{ 15m+14 \mid m \in \mathbb{N} \}$.

- Ellenőrizték, hogy a 14 és a 29 számok hozzátartoznak-e az $A \cap B$ halmazhoz.
- Mutassátok ki, hogy $A \cap B = C$.
- Határozzátok meg, hogy hány olyan x szám van, amely teljesíti az $x \in C$ és $500 \leq x \leq 1000$ feltételeket.

4. FELADAT

Adottak a következő szigorúan pozitív, különböző számok x_1, x_2, \dots, x_{63} úgy, hogy

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{63}} > 6.$$

Mutassátok ki, hogy az adott számok közül legalább egy, nem természetes szám.

Megjegyzés:

¹ Munkaidő 2 óra;

² Minden feladat kötelező;

³ Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak;



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a VII –a

1. FELADAT

Legyen D az ABC háromszög belsejében egy olyan pont, amelyre a BAC és BDC szögek kiegészítő szögek, (BE az ABD szögfelezője és (CE az ACD szögfelezője.

Határozzátok meg $m(\angle BEC)$.

2. FELADAT

Legyen $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$ illetve m és n az a osztói, $m < n$.

Mutassátok ki, hogy $a \cdot (n - m) > m^2$

3. FELADAT

Adott az $ABCD$ paralelogramma, E a C pont szimmetrikusa a B pontra nézve és $BF \perp AC$, $F \in AC$.

Ha tudjuk, hogy $DF \perp FE$, számítsátok ki $\frac{2DC+3DE}{5DC+DE}$.

4. FELADAT

Adottak az $x_1, x_2, \dots, x_{2022}$ egész számok úgy, hogy $\{x_1; x_2; \dots; x_{2022}\} = \{1; 2; \dots; 2022\}$.

Mutassátok ki, hogy az $|x_1 - 1|; |x_2 - 2|; |x_3 - 3|; \dots; |x_{2022} - 2022|$ számok között létezik legalább kettő, amelyek egyenlőek.

Megjegyzés:

¹ Munkaidő 3 óra;

² Minden feladat kötelező;

³ Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak;



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a VIII –a

1.FELADAT

Legyen $ABCD$ egy szabályos tetraéder, melynek oldaléle 10 cm. Legyen M az $[AD]$ él felezőpontja, N a $[BC]$ él felezőpontja és P a $[DN]$ szakasz felezőpontja. Határozzátok meg:

- Az MP egyenes és az (ABC) sík kölcsönös helyzetét;
- Az MN és BC egyenesek által bezárt szög mértékét;
- A C pont (ABD) síktól való távolságát.

2. FELADAT

Oldjátok meg \mathbb{Z} -n a következő egyenletet:

$$7x^2 + 8x + 1 = 4^{2x}$$

3. FELADAT

Adottak az $x, y, z > 0$, 3-tól különböző valós számok. Ha $x + y + z = 3$, mutassátok ki, hogy az

$$F(x, y, z) = \frac{x-y}{xy+3z} + \frac{y-z}{yz+3x} + \frac{z-x}{zx+3y}$$
 kifejezés egy állandó.

4. FELADAT

Egy kocka minden sarkába egy-egy gyümölcs van helyezve. A gyümölcs lehet babán, narancs vagy alma. Egy „tál” alatt egy tetszőleges síkot értünk, amely tartalmazza a kocka 4 sarkát. Állapítsátok meg, hogy létezik-e egy olyan elosztása a gyümölcsöknek, hogy minden tál tartalmazza mind a 3 gyümölcsfajtaát. Indokoljátok meg a választ.

Megjegyzés:

¹ Munkaidő 3 óra;

² Minden feladat kötelező;

³ Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak;



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a IX –a

1. FELADAT

Határozzátok meg azokat az $f: N^* \rightarrow R$ függvényeket, amelyek rendelkeznek a következő tulajdonsággal:

$$f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + \dots + n \cdot f(n) = f(n+1) - 1, \forall n \in N^*$$

2. FELADAT

Oldjátok meg a következő egyenletet az \mathbb{R} -en:

$$\sqrt{x^2 + 31x} + \sqrt{x + 31} = x + \sqrt{x} + 8$$

3. FELADAT

Tekintsük az $ABCD$ rombuszt és az $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CD)$ pontokat. Mutassátok ki, hogy az MNP háromszög súlypontja akkor és csak akkor van rajta az AC egyenesen, ha $AM + DP = BN$.

4. FELADAT

1. Adottak az $x, y, z > 0$ számok, amelyekre $x + y + z = 2$.

a) Bizonyítsátok be, hogy $\frac{x-y}{xy+2z} + \frac{y-z}{yz+2x} + \frac{z-x}{zx+2y} = 0$.

b) Bizonyítsátok be, hogy $\frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} \geq \frac{9}{8}$.

Megjegyzés:

¹ Munkaidő 3 óra;

² Minden feladat kötelező;

³ Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak;



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a X –a

1. FELADAT

Adottak a $z_1, z_2, \dots, z_{2020}$ komplex számok, melyek modulusza 1 és $z_1 + z_2 + \dots + z_{2020} = 0$.

Mutassátok ki, hogy $\sum_{k=1}^{2020} |z - z_k| \geq 2020 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

2. FELADAT

Határozzátok meg az $x, y \in (0, +\infty)$ számokat úgy, hogy:

$$\lg^2\left(\frac{x}{y}\right) = 3 \lg\left(\frac{x}{2020}\right) \cdot \lg\left(\frac{2020}{y}\right)$$

3. FELADAT

Oldjátok meg a következő egyenletet az \mathbb{R} -en: $\sqrt[5]{4x-5} + \sqrt[5]{x-2} = \sqrt[5]{2x-1}$.

4. FELADAT

Határozzátok meg azt az $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ függvényt, amely egyszerre teljesíti a következő két feltételt:

a) $f(x) \leq 5^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $f(x+y) \leq f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Megjegyzés:

¹ Munkaidő 3 óra;

² Minden feladat kötelező;

³ Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak;



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a XI –a

1. FELADAT

Adott az $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^*)$ mátrix, $n \in \mathbb{N}$ páratlan szám

Ha $A \cdot A^t = I_n$, mutassátok ki, hogy $\det(A^2 - I_n) = 0$, ahol A^t az A mátrix transzponáltja

2. FELADAT

Tekintsük az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozatot, ahol $a_1 \in (0,1)$ és $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$ bármely $n \geq 1$ esetén. Számítsátok ki:

$$a.) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad b.) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

3. FELADAT

Határozzátok meg az összes olyan $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$ halmazt, amelyek rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

- i.) $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nem szingulárisak;
- ii.) $\forall X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow XY \in \mathcal{A}$.

4. FELADAT

Legyen $f, g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ két monoton függvény. Mutassátok ki, hogy létezik $c \in (0,1]$ amelyre:

$$f(c) + g(c) \neq \sin \frac{1}{c}$$

Megjegyzés:

¹ Munkaidő 3 óra;

² Minden feladat kötelező;

³ Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak;



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a XII –a

1.FELADAT

Számítsátok ki: $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{\cos x} \cdot dx$

2. FELADAT

Az $m, n \in \mathbb{N}^*$ Jelöljük: $I_{m,n} = \int_0^1 x^m \operatorname{tg}^n x dx$.

Számítsátok ki $\lim_{m \rightarrow \infty} I_{m,2020}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{1,n}$.

3. FELADAT

Legyenek H_1, H_2, H_3 , a (\mathbb{C}^*, \cdot) részcsoportjai, amelyeknek rendre m, n illetve p eleme van, ahol $(m,n) = 1$, $(n,p) = 1$ és $(m,p) = 1$. Határozzátok meg a $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ halmaz elemeinek számát.

4. FELADAT

Legyen A egy gyűrű, $a, b \in A$, melyekre teljesül, hogy $a^2 + b^2 = ab$.

Mutassátok ki, hogy $(ab)^2 = b^2 a^2$ és $(ba)^2 = a^2 b^2$.

Megjegyzés:

¹ Munkaidő 3 óra;

² Minden feladat kötelező;

³ Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak;