OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a IX –a

PROBLEMA 1.

Să se determine funcțiile $f: N^* \to R$ cu proprietatea :

$$f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + \dots + n \cdot f(n) = f(n+1) - 1, \forall\, n \in N^*$$

PROBLEMA 2.

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\sqrt{x^2 + 31x} + \sqrt{x + 31} = x + \sqrt{x} + 8$$

PROBLEMA 3.

Fie rombul *ABCD* și punctele $M \in (AB), N \in (BC),\ P \in (CD)$. Să se arate că centrul de greutate al triunghiului *MNP* aparține dreptei *AC* dacă și numai dacă *AM* + *DP* = *BN*.

PROBLEMA 4.

1. Se dau numerele $x, y, z > 0$ pentru care $x + y + z = 2$.
   a) Să se demonstreze că $\frac{x-y}{xy+2z} + \frac{y-z}{yz+2x} + \frac{z-x}{zx+2y} = 0$.
   b) Să se demonstreze că $\frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} \geq \frac{9}{8}$.

Notă:

[1]*Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;*
[2]*Toate problemele sunt obligatorii;*
[3]*Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a X –a

PROBLEMA 1.

Fie numerele complexe $z_1, z_2, ..., z_{2020}$, fiecare având modulul egal cu 1 și $z_1 + z_2 + ... + z_{2020} = 0$.

Să se arate că $\sum_{k=1}^{2020} |z - z_k| \geq 2020 \ \forall z \in \mathbb{C}$.

PROBLEMA 2.

Determinați $x, y \in (0, +\infty)$ astfel încât

$$\lg^2\left(\frac{x}{y}\right) = 3 \lg\left(\frac{x}{2020}\right) \cdot \lg\left(\frac{2020}{y}\right)$$

PROBLEMA 3.

Rezolvați ecuația $\sqrt[5]{4x-5} + \sqrt[5]{x-2} = \sqrt[5]{2x-1}$ în $\mathbb{R}$

PROBLEMA 4.

Să se determine funcția $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ care verifică simultan condițiile :

a) $f(x) \leq 5^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $f(x+y) \leq f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Notă:

[1]*Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;*
[2]*Toate problemele sunt obligatorii;*
[3]*Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a XI –a

PROBLEMA 1.

$Fie\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^*), n \in \mathbb{N}\ impar$

$Dacă\ A \cdot A^t = I_n, arătați\ că\ det(A^2 - I_n) = 0, unde\ A^t\ este\ transpusa\ maticei\ A$

PROBLEMA 2.

Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ $cu\ a_1 \in (0,1)$ $și$ $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$ $pentru\ n \geq 1.$ Să se calculeze:

$$a.)\ \lim_{n\to\infty} a_n \qquad b.)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

PROBLEMA 3.

Determinați toate mulțimile $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$ cu proprietățile:

i.) $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ nesingulare;$
ii.) $\forall\, X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow XY \in \mathcal{A}.$

PROBLEMA 4.

Fie $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ două funcții monotone. Să se arate că există $c \in (0,1]$ astfel încât:

$$f(c) + g(c) \neq \sin\frac{1}{c}$$

Notă:

[1]*Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;*
[2]*Toate problemele sunt obligatorii;*
[3]*Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a XII –a

PROBLEMA 1.

$$Să\ se\ calculeze \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{\cos x} \cdot dx$$

PROBLEMA 2.

Pentru $m, n \in N^*$ notăm $I_{m,n} = \int_0^1 x^m tg^n x dx$. Să se calculeze $\lim_{m\to\infty} I_{m,2020}$ și $\lim_{n\to\infty} I_{1,n}$.

PROBLEMA 3.

Considerăm H_1, H_2, H_3 subgrupuri ale lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ avînd *m, n* respectiv *p* elemente, unde *(m,n) = 1*, *(n,p) = 1* și *(m,p) = 1*. Să se determine numărul elementelor mulțimii $H_1 \cup H_2 \cup H_3$.

PROBLEMA 4.

Fie A un inel și $a, b \in A$ cu proprietatea că $a^2 + b^2 = ab$. Să se arate că $(ab)^2 = b^2a^2$ și $(ba)^2 = a^2b^2$.

Notă:

[1]*Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;*
[2]*Toate problemele sunt obligatorii;*
[3]*Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;*