



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a V –a

PROBLEMA 1.

Un număr x de 7 cifre format cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5 și 6 are proprietățile:

- i) Fiecare cifră a numărului x apare în număr exact o dată;
- ii) Suma oricăror trei cifre consecutive ale numărului x este divizibilă cu trei;
- iii) Oricare două cifre alăturate ale numărului x au parități diferite;
- iv) Numărul format din primele două cifre ale numărului x este un număr prim.

Să se afle numărul x .

PROBLEMA 2.

Determinați ultima cifră a numărului $4^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)\dots(a_{2019}+a_1)} - 1$ unde $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2019}$ sunt numere naturale nenule.

PROBLEMA 3.

Aflați cifrele a, b, c, x, y dacă $\overline{abc} + \overline{ab} + c = \overline{cxya}$

PROBLEMA 4.

Fie n un număr natural nenul și S_n suma primelor n numere naturale impare care nu sunt divizibile cu 5.

- a.) Arătați că dacă n se divide cu 4, atunci S_n se divide cu $5n$.
- b.) Aflați restul împărțirii lui S_{2020} la 2021.

Notă:

¹Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a VI –a

PROBLEMA 1.

În jurul punctului O se formează unghiurile BOC , COD , DOA și AOB .

Știind că măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor COD și DOA este de 95° , măsura unghiului COD este două treimi din măsura unghiului AOD și suplementul unghiului AOB este egal cu complementul unghiului BOC , să se afle măsurile unghiurilor COD , DOA , AOB și BOC .

PROBLEMA 2.

1. Fie numărul $n = 2020^3$.
 - a) Să se descompună n în factori primi.
 - b) Să se demonstreze că oricum am alege 9 divizori naturali ai lui n , între ei există doi a căror produs este pătrat perfect.
 - c) Să se afle cel mai mic număr natural nenul m astfel încât oricum am alege m divizori ai numărului n între ei să existe doi a căror produs să nu fie pătrat perfect.

PROBLEMA 3.

Se consideră mulțimile $A = \{ 3p+2 \mid p \in \mathbb{N} \}$, $B = \{ 5k+4 \mid k \in \mathbb{N} \}$ și $C = \{ 15m+14 \mid m \in \mathbb{N} \}$.

- a) Verificați dacă numerele 14 și 29 aparțin mulțimii $A \cap B$.
- b) Arătați că $A \cap B = C$.
- c) Aflați câte numere x îndeplinesc condițiile $x \in C$ și $500 \leq x \leq 1000$.

PROBLEMA 4.

Se consideră numerele strict pozitive și distincte x_1, x_2, \dots, x_{63} astfel încât

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{63}} > 6.$$

Arătați că cel puțin unul dintre aceste numere nu este natural.

Notă:

¹Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a VII –a

PROBLEMA 1.

Punctul D este în interiorul triunghiului ABC , astfel încât unghiurile BAC și BDC sunt suplementare, (BE este bisectoarea $\sphericalangle ABD$ și (CE este bisectoarea $\sphericalangle ACD$).

Aflați $m(\sphericalangle BEC)$.

PROBLEMA 2.

Fie $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$ iar m și n divizori ai lui a cu $m < n$.

Arătați că $a \cdot (n - m) > m^2$ (1)

PROBLEMA 3.

Se consideră paralelogramul $ABCD$, E simetricul lui C față de B și $BF \perp AC$, $F \in AC$.

Știind că $DF \perp FE$ calculați $\frac{2DC + 3DE}{5DC + DE}$

PROBLEMA 4.

Fie numerele întregi $x_1, x_2, \dots, x_{2022}$ astfel în cât $\{x_1; x_2; \dots; x_{2022}\} = \{1; 2; \dots; 2022\}$.

Arătați că printre numerele: $|x_1 - 1|; |x_2 - 2|; |x_3 - 3|; \dots; |x_{2022} - 2022|$

există cel puțin două egale.

Notă:

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a VIII –a

PROBLEMA 1.

Fie tetraedrul regulat $ABCD$ cu lungimea muchiei de 10 cm. Fie M mijlocul muchiei $[AD]$, N mijlocul muchiei $[BC]$ și P mijlocul segmentului $[DN]$. Determinați:

- Poziția dreptei MP față de planul (ABC) ;
- Măsura unghiului format de dreptele MN și BC ;
- Distanța de la punctul C la planul (ABD) .

PROBLEMA 2.

Să se rezolve în \mathbb{Z} ecuația:

$$7x^2 + 8x + 1 = 4^{2x}$$

PROBLEMA 3.

Se dau numerele reale $x, y, z > 0$, diferite de 3. Dacă $x + y + z = 3$ arătați că:

$$F(x, y, z) = \frac{x - y}{xy + 3z} + \frac{y - z}{yz + 3x} + \frac{z - x}{zx + 3y}$$

este constantă.

PROBLEMA 4.

În fiecare din vârfurile unui cub se pune câte un singur fruct. Fructul poate fi banană, portocală sau măr. Prin „platou” se înțelege orice plan care conține 4 dintre vârfurile cubului. Stabiliți dacă există o așezare a fructelor astfel încât fiecare platou să conțină toate cele 3 tipuri de fructe. Justificați răspunsul.

Notă:

¹ Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

² Toate problemele sunt obligatorii;

³ Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;