OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a V –a

PROBLEMA 1.

Un număr x de 7 cifre format cu cifrele $0, 1, 2, 3,4\ ,5\ și\ 6$ are proprietățile:

i) Fiecare cifră a numărului x apare în număr exact o dată;

ii) Suma oricăror trei cifre consecutive ale numărului x este divizibilă cu trei;

iii) Oricare două cifre alăturate ale numărului x au parități diferite;

iv) Numărul format din primele două cifre ale numărului x este un număr prim.

Să se afle numărul x.

PROBLEMA 2.

Determinați ultima cifră a numărului $4^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)\dots(a_{2019}+a_1)}-1$ unde $a_1, a_2, a_{3,} \dots a_{2019}$ sunt numere naturale nenule.

PROBLEMA 3.

Aflați cifrele a, b, c, x, y dacă $\overline{abc}+\overline{ab}+c=\overline{cxya}$

PROBLEMA 4.

Fie n un număr natural nenul și S_n suma primelor n numere naturale impare care nu sunt divizibile cu 5.

a.) Arătați că dacă n se divide cu 4, atunci S_n se divide cu 5n.

b.) Aflați restul împărțirii lui S_{2020} la 2021.

Notă:

[1]*Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;*
[2]*Toate problemele sunt obligatorii;*
[3]*Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a VI –a

PROBLEMA 1.

În jurul punctului O se formează unghiurile BOC, COD, DOA şi AOB.

Ştiind că măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor COD şi DOA este de 95^0, măsura unghiului COD este două treimi din măsura unghiului AOD şi suplementul unghiului AOB este egal cu complementul unghiului BOC, să se afle măsurile unghiurilor COD, DOA, AOB şi BOC.

PROBLEMA 2.

1. Fie numărul $n = 2020^3$.
   a) Să se descompună n în factori primi.
   b) Să se demonstreze că oricum am alege 9 divizori naturali ai lui n, între ei există doi a căror produs este pătrat perfect.
   c) Să se afle cel mai mic număr natural nenul m astfel încât oricum am alege m divizori ai numărului n între ei să existe doi a căror produs să nu fie pătrat perfect.

PROBLEMA 3.

Se consideră mulțimile A={ 3p+2 | p ϵ ℕ }, B={ 5k+4 | k ϵ ℕ } și C={ 15m+14 | m ϵ ℕ }.

a) Verificați dacă numerele 14 și 29 aparțin mulțimii A∩B.
b) Arătați că A∩B = C.
c) Aflați câte numere x îndeplinesc condițiile x ϵ C și 500≤x≤1000.

PROBLEMA 4.

Se consideră numerele strict pozitive și distincte $x_1, x_2, \dots, x_{63}$ astfel încât

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{63}} > 6.$$

Arătați că cel puțin unul dintre aceste numere nu este natural.

Notă:

[1]*Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;*
[2]*Toate problemele sunt obligatorii;*
[3]*Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a VII –a

PROBLEMA 1.

Punctul *D* este în interiorul triunghiului *ABC*, astfel încât unghiurile *BAC* și *BDC* sunt suplementare, (*BE* este bisectoarea $\sphericalangle ABD$ și (*CE* este bisectoarea $\sphericalangle ACD$.

Aflați $m(\sphericalangle BEC)$.

PROBLEMA 2.

Fie $a \in \mathbb{N}, a \geq 2$ iar m și n divizori ai lui a cu m < n.

Arătați că $a \cdot (n - m) > m^2$

PROBLEMA 3.

Se consideră paralelogramul *ABCD*, *E* simetricul lui *C* față de *B* și $BF \perp AC,\ F \in AC$.
Știind că $DF \perp FE$ calculați $\dfrac{2DC + 3DE}{5DC + DE}$

PROBLEMA 4.

Fie numerele întregi $x_1, x_2, \dots x_{2022}$ astfel în cât $\{x_1; x_2; \dots; x_{2022}\} = \{1; 2; \dots, ; 2022\}$.

Arătați că printre numerele: $|x_1 - 1|; |x_2 - 2|; |x_3 - 3|; \dots; |x_{2022} - 2022|$

există cel puțin două egale.

Notă:

[1]*Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;*
[2]*Toate problemele sunt obligatorii;*
[3]*Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a VIII –a

PROBLEMA 1.

Fie tetraedrul regulat *ABCD* cu lungimea muchiei de 10 cm. Fie *M* mijlocul muchiei [*AD*], *N* mijlocul muchiei [*BC*] și *P* mijlocul segmentului [*DN*]. Determinați:

a.) Poziția dreptei *MP* față de planul (*ABC*);
b.) Măsura unghiului format de dreptele *MN* și *BC*;
c.) Distanța de la punctul *C* la planul (*ABD*).

PROBLEMA 2.

Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația:

$$7x^2 + 8x + 1 = 4^{2x}$$

PROBLEMA 3.

Se dau numerele reale $x, y, z > 0$, diferite de 3. Dacă $x + y + z = 3$ arătați că:

$$F(x,y,z) = \frac{x-y}{xy+3z} + \frac{y-z}{yz+3x} + \frac{z-x}{zx+3y}$$

este constantă.

PROBLEMA 4.

În fiecare din vârfurile unui cub se pune câte un singur fruct. Fructul poate fi banană, portocală sau măr. Prin „platou” se înțelege orice plan care conține 4 dintre vârfurile cubului. Stabiliți dacă există o așezare a fructelor astfel încât fiecare platou să conțină toate cele 3 tipuri de fructe. Justificați răspunsul.

Notă:

[1]*Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;*
[2]*Toate problemele sunt obligatorii;*
[3]*Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a IX –a

PROBLEMA 1.

Să se determine funcțiile $f : N^* \to R$ cu proprietatea :

$$f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + \dots + n \cdot f(n) = f(n+1) - 1, \forall\, n \in N^*$$

PROBLEMA 2.

Să se rezolve în ℝ ecuația:

$$\sqrt{x^2 + 31x} + \sqrt{x + 31} = x + \sqrt{x} + 8$$

PROBLEMA 3.

Fie rombul *ABCD* și punctele $M \in (AB), N \in (BC),\ P \in (CD)$. Să se arate că centrul de greutate al triunghiului *MNP* aparține dreptei *AC* dacă și numai dacă *AM* + *DP* = *BN*.

PROBLEMA 4.

1. Se dau numerele $x, y, z > 0$ pentru care $x + y + z = 2$.
   a) Să se demonstreze că $\frac{x-y}{xy+2z} + \frac{y-z}{yz+2x} + \frac{z-x}{zx+2y} = 0$.
   b) Să se demonstreze că $\frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} \geq \frac{9}{8}$.

Notă:

[1] *Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;*
[2] *Toate problemele sunt obligatorii;*
[3] *Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a X –a

PROBLEMA 1.

Fie numerele complexe $z_1, z_2, ..., z_{2020}$, fiecare având modulul egal cu 1 și $z_1 + z_2 + ... + z_{2020} = 0$.

Să se arate că $\sum_{k=1}^{2020} |z - z_k| \geq 2020 \ \forall z \in \mathbb{C}$.

PROBLEMA 2.

Determinați $x, y \in (0, +\infty)$ astfel încât

$$\lg^2\left(\frac{x}{y}\right) = 3 \lg\left(\frac{x}{2020}\right) \cdot \lg\left(\frac{2020}{y}\right)$$

PROBLEMA 3.

Rezolvați ecuația $\sqrt[5]{4x-5} + \sqrt[5]{x-2} = \sqrt[5]{2x-1}$ în $\mathbb{R}$

PROBLEMA 4.

Să se determine funcția $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ care verifică simultan condițiile :

a) $f(x) \leq 5^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $f(x+y) \leq f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Notă:

[1]*Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;*
[2]*Toate problemele sunt obligatorii;*
[3]*Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a XI –a

PROBLEMA 1.

$Fie\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^*), n \in \mathbb{N}\ impar$

$Dacă\ A \cdot A^t = I_n, arătați\ că\ det(A^2 - I_n) = 0, unde\ A^t\ este\ transpusa\ maticei\ A$

PROBLEMA 2.

Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ $cu\ a_1 \in (0,1)$ $și\ a_{n+1} = 2^{a_n} - 1\ pentru\ n \geq 1$. Să se calculeze:

$$a.)\ \lim_{n\to\infty} a_n \qquad b.)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

PROBLEMA 3.

Determinați toate mulțimile $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$ cu proprietățile:

i.) $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ nesingulare$;
ii.) $\forall\, X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow XY \in \mathcal{A}$.

PROBLEMA 4.

Fie $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ două funcții monotone. Să se arate că există $c \in (0,1]$ astfel încât:

$$f(c) + g(c) \neq \sin\frac{1}{c}$$

Notă:

[1]*Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;*
[2]*Toate problemele sunt obligatorii;*
[3]*Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a XII –a

PROBLEMA 1.

$$Să\ se\ calculeze \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{\cos x} \cdot dx$$

PROBLEMA 2.

Pentru $m, n \in N^*$ notăm $I_{m,n} = \int_0^1 x^m tg^n x dx$. Să se calculeze $\lim_{m\to\infty} I_{m,2020}$ și $\lim_{n\to\infty} I_{1,n}$.

PROBLEMA 3.

Considerăm H_1, H_2, H_3 subgrupuri ale lui $(\mathbb{C}^*, \ \cdot)$ având *m, n* respectiv *p* elemente, unde *(m,n) = 1*, *(n,p) = 1* și *(m,p) = 1*. Să se determine numărul elementelor mulțimii $H_1 \cup H_2 \cup H_3$.

PROBLEMA 4.

Fie A un inel și $a, b \in A$ cu proprietatea că $a^2 + b^2 = ab$. Să se arate că $(ab)^2 = b^2a^2$ și $(ba)^2 = a^2b^2$.

Notă:

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;