OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V –a

PROBLEMA 1.

Un număr x de 7 cifre format cu cifrele $0, 1, 2, 3,4$,5 $și$ 6 are proprietățile:

i) Fiecare cifră a numărului x apare în număr exact o dată;
ii) Suma oricăror trei cifre consecutive ale numărului x este divizibilă cu trei;
iii) Oricare două cifre alăturate ale numărului x au parități diferite;
iv) Numărul format din primele două cifre ale numărului x este un număr prim.
Să se afle numărul x.

Barem

Fie x = $\overline{abcdefg}$ numărul căutat.

Deoarece, $\overline{ab}$ este număr prim avem b = 1 sau b = 3. .... *1p*

1. $b = 1\ \Rightarrow a = 4\ sau\ a = 6$ 1p
   dacă a = 4 și b = 1 atunci nu există c care să verifice condiția ii)..*1p*
   dacă a = 6 și b = 1 atunci c = 2, d = 3, e = 4, f = 5 și g = 0 ....*1p*
   deci x = 6123450
2. $b = 3\ \Rightarrow a = 2\ sau\ a = 4$

   dacă a = 2 și b = 3 atunci c =4, d = 5, e = 6, f = 1 și g = 0

   X = 2345610, nu verifică condiția ii) *1p*

   dacă a = 4 și b = 3 atunci c =2, d = 1, e = 6 , f = 5 și g = 0

   x = 4321640, nu verifică condiția ii) *1p*

   Singura soluție este x = 6123450. ....*1p*

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V –a

PROBLEMA 2.

Determinați ultima cifră a numărului $4^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)\ldots(a_{2019}+a_1)}-1$ unde $a_1, a_2, a_{3,} \ldots a_{2019}$ sunt numere naturale nenule.

Gazeta Matematică 6-7-8

Barem

Presupunem că $(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)\ldots(a_{2019}+a_1)=impar$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1+a_2=impar \\ a_2+a_3=impar \\ a_3+a_4=impar \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \underline{a_{2019}+a_1=impar} \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2p$$

$2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2019})=impar$(sumă de 2019 termeni impari) Contradicție. *…………………2p*

$\Rightarrow (a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)\ldots(a_{2019}+a_1)=par$ *…………………………………………………………1p*

$u\left(4^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)\ldots(a_{2019}+a_1)}-1\right)=5$ *…………………………………………………………………2p*

Notă:

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V –a

PROBLEMA 3.

Aflați cifrele a, b, c, x, y dacă $\overline{abc} + \overline{ab} + c = \overline{cxya}$

Soluție (barem de corectare)

Relația se scrie 109a+11b=998 c+100x+10y. 1p

Din a, b cifre avem 109a+11b$\leq 1080 \; => c = 1$...1p

Relația devine 109a+11b=998+100x+10y.

Din 109a+11b≤ 1080 $și$ 109a+11b=998+100x+10y.

avem 998+100x+10y≤ 1080 sau 100x+10y≤ 82 $, deci\ x = 0,$

$Relația\ devine\ 109a + 11b = 998 + 10y.$

Dacă a≤8 atunci 109a≤ 872 $și\ din\ 11b \leq 99\ obținem\ \ 109a + 11b \leq 971,$

adică 998+10y$\leq 971,$ 2p

Deci a = 9

Relația devine 981+11b=998+10y sau 11b=17+10y, de unde b=7, și y=6 ....2p

Concluzie a=9, b=7, c=1, x=0,y=6 ....1p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V –a

PROBLEMA 4.

Fie n un număr natural nenul și S_n suma primelor n numere naturale impare care nu sunt divizibile cu 5.
a.) Arătați că dacă n se divide cu 4, atunci S_n se divide cu 5n.
b.) Aflați restul împărțirii lui S_{2020} la 2021.

Soluție (barem de corectare)

a) Numerele impare care nu se divid cu 5 sunt de forma 10k+1, 10k+3, 10k+7, 10k+9, unde k este număr natural. Într-adevăr pentru k=0 numerele sunt 1, 3, 7, 9, pentru k=1, avem 11, 13, 17, 19 numere care nu se divid cu 5..1p.

Deci numărul termenilor se divide cu 4, atunci n=4k+4 și îi putem grupa câte 4 astfel

$$S_n = (1+3+7+9) + (11+13+17+19) + \cdots + (10k+1+10k+3+10k+7+10k+9)$$

$= 20 + 60 + \cdots + (40k+20) = 20[1+3+\cdots+(2k+1)] = 20(k+1)^2 = 5 \cdot 4(k+1)^2 = 5n$, deci S_n se divide cu 5n. 2p

b) Scriem 2020=4·505..1p

Atunci $S_{2020} = 20 \cdot 505^2 = 4 \cdot 5 \cdot 505 \cdot 505 = 4 \cdot 505 \cdot 5 \cdot 505 = 2020 \cdot 2525 = 2020 \cdot (2021 + 504) = 2020 \cdot 2021 + 2020 \cdot 504 = 2020 \cdot 2021 + (2021 - 1) \cdot 504 = M_{2021} - 504 = M_{2021} + 1517$ 2p

Restul este 1517..1p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

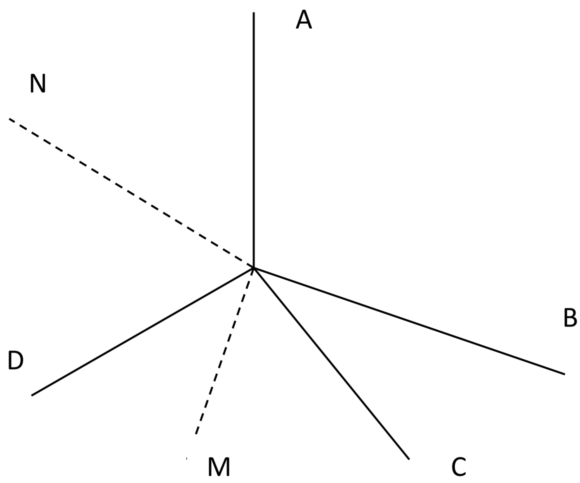
BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI –a

PROBLEMA 1.

În jurul punctului O se formează unghiurile BOC, COD, DOA şi AOB.

Ştiind că măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor COD şi DOA este de 95^0, măsura unghiului COD este două treimi din măsura unghiului AOD şi suplementul unghiului AOB este egal cu complementul unghiului BOC, să se afle măsurile unghiurilor COD, DOA, AOB şi BOC.

Soluție (barem de corectare)



Desen...1 p

Ducem [OM bisectoarea unghiului COD şi [ON bisectoarea unghiului AOD.

$$m(\widehat{MON}) = 95^0 \Leftrightarrow m(\widehat{MOD}) + m(\widehat{DON}) = 95^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m(\widehat{COD}) + m(\widehat{AOD}) = 190^0 \Rightarrow m(\widehat{AOB}) +$$

$+ m(\widehat{BOC}) = 170^0$ ....1 p

Notăm $m(\widehat{AOB}) = x^0$ şi $m(\widehat{BOC}) = y^0$. Deci $x^0 + y^0 = 170^0$. ....1 p

Deoarece suplementul $\widehat{AOB}$ este egal cu complementul $\widehat{BOC}$ avem:

$180^0 - x^0 = 90^0 - y^0 \Leftrightarrow 180^0 = 90^0 + x^0 - y^0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 180^0 - 90^0 = x^0 - y^0 \Leftrightarrow x^0 - y^0 = 90^0$ …………..1 p

Din $x^0 + y^0 = 170^0$ şi $x^0 - y^0 = 90^0$ se află că $x^0 = 130^0$ şi $y^0 = 40^0$.Deci $m(\widehat{AOB}) = 130^0$ şi $m(\widehat{BOC}) = 40^0$................1 p

Pentru a afla $m(\widehat{COD})$ şi $m(\widehat{AOD})$ ţinem cont că $m(\widehat{COD}) + m(\widehat{AOD}) = 190^0$ şi $m(\widehat{COD}) = \frac{2}{3} m(\widehat{AOD})$.

Avem $\frac{2}{3} m(\widehat{AOD}) + m(\widehat{AOD}) = 190^0 \Leftrightarrow 5m(\widehat{AOD}) = 570^0 \Leftrightarrow m(\widehat{AOD}) = 114^0$ 1p

şi $m(\widehat{COD}) = 76^0$............1 p

Notă:

---

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI –a

PROBLEMA 2.

1. Fie numărul $n = 2020^3$.
   a) Să se descompună n în factori primi.
   b) Să se demonstreze că oricum am alege 9 divizori naturali ai lui n, între ei există doi a căror produs este pătrat perfect.
   c) Să se afle cel mai mic număr natural nenul m astfel încât oricum am alege m divizori ai numărului n între ei să existe doi a căror produs să nu fie pătrat perfect.

Barem

a) $n = 2020^3 = 2^6 \cdot 5^3 \cdot 101^3$ **2p**

b) Un divizor al lui n este de forma $2^x \cdot 5^y \cdot 101^z$, unde y, z sunt numere naturale mai mici sau egale cu 3 iar x număr natural mai mic decât 7.
Fie $d_1 = 2^x \cdot 5^y \cdot 101^z$ și $d_2 = 2^a \cdot 5^b \cdot 101^c$ atunci $d_1 \cdot d_2 = 2^{x+a} \cdot 5^{y+b} \cdot 101^{z+c}$e pătrat perfect dacă și numai dacă $x + a, y + b, z + c$ sunt pare adică x și a au aceeași paritate, y și b au aceeași paritate respectiv z și c au aceeași paritate.......**1p**

Divizorii lui n sunt de forma $2^x \cdot 5^y \cdot 101^z$, în funcție de paritățile lui x, y, z avem 8 grupe posibile:
(1) $x - par, y - par, z - par$
(2) $x - par, y - impar, z - par$
(3) $x - impar, y - par, z - par$
(4) $x - impar, y - impar, z - par$
(5) $x - par, y - par, z - impar$
(6) $x - par, y - impar, , z - impar$
(7) $x - impar, y - par, z - impar$
(8) $x - impar, y - impar, z - impar$ ……………………………..**1p**
Deci oricum am alege 9 divizori între ei există doi care se află în aceeași grupă deci produsul lor este pătrat perfect……………………………………………**1p**

c) De la 0 până la 3 avem 2 numere pare și 2 numere impare, iar de la 0 până la 6 avem 4 numere pare și 3 numere impare deci cele mai multe elemente le avem în grupele $(1), (2), (5), (6)$ unde avem $4 \cdot 2 \cdot 2$ adică16 numere.
Dacă am alege cel mult 16 divizori ar fi posibil ca toți să fie din aceeași grupă deci produsul oricăror doi să fie pătrat perfect……………………………**1p**
Oricum alegem 17 vor exista cel puțin doi care să se afle în grupe diferite deci produsul lor nu va fi pătrat perfect
Deci $m = 17$. **1p**

Notă:

---

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI –a

PROBLEMA 3.

Se consideră mulțimile A={ 3p+2 | p ϵ ℕ }, B={ 5k+4 | k ϵ ℕ } și C={ 15m+14 | m ϵ ℕ }.

a) Verificați dacă numerele 14 și 29 aparțin mulțimii A∩B.
b) Arătați că A∩B = C.
c) Aflați câte numere x îndeplinesc condițiile x ϵ C și 500≤x≤1000.

Soluție (barem de corectare)

a) 14 = **3**×4+**2** și 14 = **5**×2+**4** ⟹ 14 $\in A \cap B$...1p
29 = **3**×7+**2** și 29 = **5**×5+**4** ⟹ 29 $\in A \cap B$...1p

b) Fie x ϵ A∩B ⟹ x = 3p+2=5k+4 ⟹3p=5k+2⟹ 3p=5(k-2)+12 ⟹ 3(p-4)=5(k-2)................1p

p-4 ϵ M_5 ⟹ p ϵ M_5+4 ⟹ x ϵ M_{15} + 14 ⟹ $x \epsilon C$ 1p

Fie $x \in C \Rightarrow x = 3 \cdot (5m+4) + 2 \in A$ și $x = 5 \cdot (3m+2) + 4 \in B \Rightarrow A \cap B = C$ 1p

c) 500≤15m+14≤1000..1p

32,4 ≤m≤65,7(3), m ϵ{ 33,34,....,65 }, sunt 33 numere...1p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI –a

PROBLEMA 4.

Se consideră numerele strict pozitive și distincte $x_1, x_2, \dots, x_{63}$ astfel încât

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{63}} > 6.$$

Arătați că cel puțin unul dintre aceste numere nu este natural.

Soluție:

Presupunem că $x_1, x_2, \dots, x_{63} \in \mathbb{N}$ și fiind distincte fără a restrînge generalitatea considerăm că

$x_1 < x_2 < \dots < x_{63} \Rightarrow x_1 \geq 1;\ x_2 \geq 2; \dots\ x_{63} \geq 63$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{63}} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{63} = S_1$$

$$S_1 = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{31}\right) + \left(\frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{63}\right)$$

$$S_1 < 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \frac{1}{16} \cdot 16 + \frac{1}{32} \cdot 32 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$$

$\Rightarrow S < 6$ contradicție $\Rightarrow$ cel puțin un număr nu este natural.

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII –a

PROBLEMA 1.

Punctul *D* este în interiorul triunghiului *ABC*, astfel încât unghiurile *BAC* și *BDC* sunt suplementare, (*BE* este bisectoarea $\sphericalangle ABD$ și (*CE* este bisectoarea $\sphericalangle ACD$.

Aflați $m(\sphericalangle BEC)$.

Soluție:

$m(\sphericalangle ABE) = m(\sphericalangle DBE) = a$

$m(\sphericalangle ACE) = m(\sphericalangle DCE) = b$

$m(\sphericalangle DBC) = x$; $m(\sphericalangle DCB) = y$

$\Longrightarrow x + y = m(\sphericalangle A)$ 3p

$2a + 2b + 2x + 2y = 180^0$

$\Longrightarrow a + b + x + y = 90^0$ 3p

$\Longrightarrow m(\sphericalangle E) = 90^0$ 1p

Notă:

---

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII –a

PROBLEMA 2.

Fie $a \in \mathbb{N}, a \geq 2$ iar m și n divizori ai lui a cu m $<$ n.

Arătați că $a \cdot (n - m) > m^2$ (1)

Soluție :

$a = m \cdot p$ *și* $a = n \cdot q \Rightarrow p > q \Rightarrow p - 1 \geq q$ 2p

$(1) \Leftrightarrow m \cdot p(n - m) > m^2$

$\Leftrightarrow pn - pm > m$

$\Leftrightarrow pn > m\,(p + 1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{p}{p+1} > \dfrac{m}{n}$ (2) 2p

$dar\ \dfrac{m}{n} = \dfrac{q}{p} \Rightarrow (2) \Leftrightarrow \dfrac{p}{p+1} > \dfrac{q}{p}$

$dar\ p - 1 \geq q \Rightarrow \dfrac{p-1}{p} \geq \dfrac{q}{p}$ 2p

$dar\ \dfrac{p}{p+1} > \dfrac{p-1}{p} \Rightarrow \dfrac{p}{p+1} > \dfrac{q}{p} \Rightarrow (1)$ 1p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

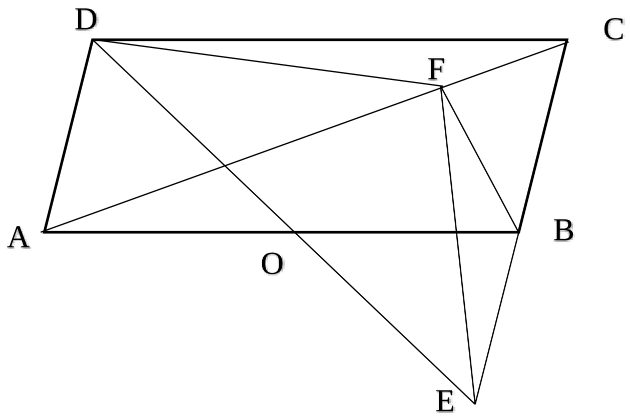
Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII –a

PROBLEMA 3.

Se consideră paralelogramul *ABCD*, *E* simetricul lui *C* față de *B* și $BF \perp AC,\ F \in AC.$
Știind că $DF \perp FE$ calculați $\dfrac{2DC+3DE}{5DC+DE}$

Soluție:



$ABCD\ paralelogram;\ AB \cap DE = \{O\}$ 1p

$OF = \frac{AB}{2}; OF = \frac{DE}{2} \Rightarrow\ AB = DE\ \Rightarrow ABCD\ dreptunghi$ 3p

$\Rightarrow DB\ \perp EC\ \Rightarrow DCE\ isoscel\ \Rightarrow DC = DE$ 2p

$\Rightarrow raportul\ este\ \dfrac{5}{6}$ 1p

Notă:

---

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII –a

PROBLEMA 4.

Fie numerele întregi $x_1, x_2, \dots x_{2022}$ astfel în cât $\{x_1; x_2; \ \dots; x_{2022}\} = \{1; \ 2; \ \dots,; 2022\}$.

Arătați că printre numerele: $|x_1 - 1|; |x_2 - 2|; |x_3 - 3|; \dots; |x_{2022} - 2022|$

există cel puțin două egale.

Soluție

Presupunem că numerele $|x_1 - 1|; |x_2 - 2|; |x_3 - 3|; \dots; |x_{2022} - 2022|$ sunt diferite două câte două

$\Rightarrow$ mulțimea lor este $\{0; 1; \ 2; \ \dots; 2021\}$ 2p

Fie $S_1 = |x_1 - 1| + |x_2 - 2| + |x_3 - 3| + \cdots + |x_{2022} - 2022| = 2021 \cdot 1011$ *număr impar*

și $S_2 = \ x_1 - 1 + x_2 - 2 + \cdots + \ x_{2022} - 2022 = 0$ 2p

Dar $|x_i - i|$ *și* $x_i - i$ au aceeași paritate

$\Rightarrow S_1$ *și* S_2 *au aceeași paritate* $\Rightarrow$ *contradicție* 2p

$\Rightarrow |x_1 - 1|; |x_2 - 2|; |x_3 - 3|; \dots; |x_{2022} - 2022|$ nu pot fi diferite două câte două. 1p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

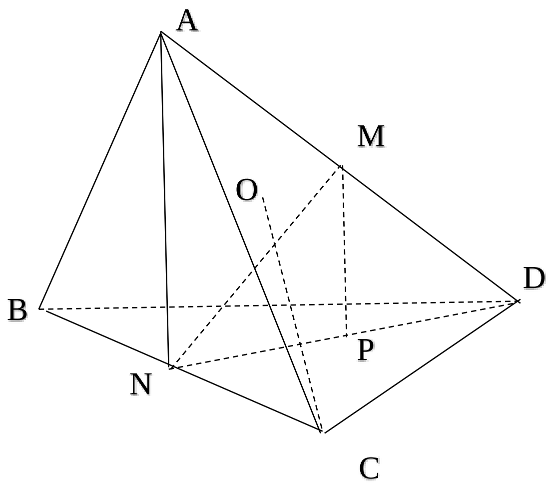
BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII –a

PROBLEMA 1.

Fie tetraedrul regulat *ABCD* cu lungimea muchiei de 10 cm. Fie *M* mijlocul muchiei [*AD*], *N* mijlocul muchiei [*BC*] și *P* mijlocul segmentului [*DN*]. Determinați:

a.) Poziția dreptei *MP* față de planul (*ABC*);
b.) Măsura unghiului format de dreptele *MN* și *BC*;
c.) Distanța de la punctul *C* la planul (*ABD*).

Soluție:



a.) MP linie mijlocie în $\Delta\, ADN \Rightarrow MP \parallel AN \Rightarrow NP \parallel (ABC)$ 2p

b.) $\Delta\, BCD$ $echilateral$ și DN $median$ă $\Rightarrow DN$ înălțime $\Rightarrow BC \perp DN$

analog $BC \perp AN, deci\ BC \perp (AND)$

$MN \subset (AND) \Rightarrow BC \perp MN \Rightarrow m\left(\widehat{BC, MN}\right) = 90^0$ 2p

c.) Fie $CO \perp (ABD), O \in (ABD)$, $\Delta\, ABD\ echilateral \Rightarrow OA = OB = OD = \frac{10\sqrt{3}}{3}\ cm$

$Folosind\ teorema\ lui\ Pitagora$ în $\Delta\, AOC$ obț$inem\ CO = \dfrac{10\sqrt{6}}{3}\ cm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..3p$

Notă:

---

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII –a

PROBLEMA 2.

Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația:

$$7x^2 + 8x + 1 = 4^{2x}$$

Soluție:

$Pentru\ x < 0 \implies 4^{2x} \notin \mathbb{Z}$ 1p

$Fie\ x \geq 0$

Ecuația se scrie:

$(7x+1)(x+1) = 2^{4x}$ 1p

$\implies x + 1 = 2^m$

$\implies 7x + 1 = 2^n; cu\ n \geq m$ 2p

$\implies \dfrac{7x+1}{x+1} = 2^{n-m} \in \mathbb{N}$

$\implies x + 1 \mid 6; dar\ \ x + 1 = 2^m \implies x + 1 \in \{1; 2\}$ 2p

$Pentru\ x + 1 = 1 \implies x = 0$

$Pentru\ x + 1 = 2 \implies x = 1$. Ambele sunt soluții. 1p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII –a

PROBLEMA 3.

Se dau numerele reale $x, y, z > 0$, diferite de 3. Dacă $x + y + z = 3$ arătați că:

$$F(x,y,z) = \frac{x-y}{xy+3z} + \frac{y-z}{yz+3x} + \frac{z-x}{zx+3y}$$

este constantă.

G.M. nr. 12/2019

Soluție:

Înlocuim $z = 3 - x - y$ în prima fracție, obținem:

$$\frac{x-y}{xy+3(3-x-y)} = \frac{x-y}{xy-3x-3y+9} = \frac{x-y}{(x-3)(y-3)}$$

Analog

$$\frac{y-z}{yz+3x} = \frac{y-z}{(y-3)(z-3)}$$

$$\frac{z-x}{zx+3y} = \frac{z-x}{(z-3)(x-3)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.4p$$

Ca urmare:

$$F(x,y,z) = \frac{(x-y)(z-3)+(y-z)(x-3)+(z-x)(y-3)}{(x-3)(y-3)(z-3)}$$

$$\Rightarrow F(x,y,z) = 0 \quad \forall x,y,z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..3p$$

Notă:

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII –a

PROBLEMA 4.

În fiecare din vârfurile unui cub se pune câte un singur fruct. Frucrul poate fi banană, portocală sau măr. Prin „platou” se înțelege orice plan care conține 4 dintre vârfurile cubului. Stabiliți dacă există o așezare a fructelor astfel încât fiecare platou să conțină toate cele 3 tipuri de fructe. Justificați răspunsul.

Soluție:

Notăm cubul $ABCDA'B'C'D'$.

Considerăm că în A și B avem fructe de același fel, de exemplu banane.

Rezultă că în C și D avem măr și portocală sau invers. Analog în A' și B', deci planul $(CDA'B')$ nu conține banane.

Rezultă că nu se poate ca pe o muchie să avem două fructe de același fel. 4p

Analizăm cazul în care în A și B sunt fructe diferite, de exemplu măr în A și banană în B.

Fiecare din planele $(ABCD)$, $(ABB'A')$ și $(ABC'D')$ va conține o singură portocală. Deci în 3 dintre vârfurile C, D, A', B', C', D' vor fi portocale, iar în celelalte 3 vor fi două mere și o banană, sau două banane și un măr.

Dacă sunt două mere și o banană atunci vor exista două muchii paralele care nu conțin banană, deci imposibil.

Dacă sunt două banane și un măr atunci există două muchii paralele care conțin măr.

Deci nu este posibil ca toate platourile să conțină toate tipurile de fructe. 3p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 1.

Să se determine funcțiile $f: N^* \to R$ cu proprietatea :

$$f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + \dots + n \cdot f(n) = f(n+1) - 1, \forall\, n \in N^*$$

Soluție.

Pentru n=1 relația devine $f(2) = 1 + f(1)$. (1 punct)

Pentru n=2 relația devine $f(1) + 2f(2) = f(3) - 1 \Leftrightarrow f(3) = 3\big(1 + f(1)\big)$. (1 punct)

Pentru n=3 relația dată conduce la $f(4) = 12 \cdot \big(1 + f(1)\big)$. (1 punct)

Prin inducție se arată că $f(n) = \frac{n!}{2}\big(1 + f(1)\big)$, pentru orice $n \geq 2$. (unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$)

(3 puncte)

Notând f(1)=a, unde a este un număr real, rezultă că funcțiile căutate sunt:

$$f: N^* \to R, f(n) = \begin{cases} a, & n = 1 \\ \frac{n!(a+1)}{2}, & n \geq 2 \end{cases}.$$ (1 punct)

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 2.

Să se rezolve în ℝ ecuația:

$$\sqrt{x^2+31x}+\sqrt{x+31}=x+\sqrt{x}+8$$

Soluție:

$$\sqrt{x(x+31)}+\sqrt{x+31}=\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)+8$$

$$\sqrt{x+31}\,(\sqrt{x}+1)=\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)+8$$

$$(\sqrt{x}+1)\left(\sqrt{x+31}-\sqrt{x}\right)=8$$ 2p

$notăm \quad a=\sqrt{x+31}$ $și\ b=\sqrt{x}$

$$\begin{cases}(b+1)(a-b)=8\\ a^2-b^2=31\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(b+1)(a-b)=8\\ (a-b)(a+b)=31\end{cases}$$ 2p

$$dar\quad a\neq b\ \Rightarrow\ \frac{b+1}{a+b}=\frac{8}{31}\Leftrightarrow a=\frac{23b+31}{8}\Rightarrow 15b^2+46b-33=0$$ 2p

$$b_1=-\frac{11}{3},\qquad b_2=\frac{3}{5}\quad\Longrightarrow x=\frac{9}{25}$$ 1p

Notă:

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 3.

Fie rombul *ABCD* și punctele $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CD)$. Să se arate că centrul de greutate al triunghiului *MNP* aparține dreptei *AC* dacă și numai dacă *AM* + *DP* = *BN*.

Soluție:

Fie *R* mijlocul lui $[NP]$ $iar\ MR \cap AC = \{G\}$

$Considerăm\ \dfrac{MG}{GR} = k, AB = a,$ ……………………………………………………………1p

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AM} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AR} = \frac{1}{1+k}\frac{AM}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}\right)$$

$$= \frac{1}{1+k}\frac{AM}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{2(1+k)}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\right) + \frac{k}{2(1+k)}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}\right)$$

$$= \frac{AM}{(1+k)a}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{2(1+k)}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{2(1+k)}\frac{BN}{a}\overrightarrow{BC} + \frac{k}{2(1+k)}\overrightarrow{AD} + \frac{k}{2(1+k)}\frac{DP}{a}\overrightarrow{DC}$$

$$= \left(\frac{AM}{(1+k)a} + \frac{k}{2(1+k)} + \frac{kDP}{2a(1+k)}\right)\cdot\overrightarrow{AB} + \left(\frac{kBN}{2a(1+k)} + \frac{k}{2(1+k)}\right)\cdot\overrightarrow{AD} \ldots\ldots\ldots.2p$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}\ \ coliniari \Leftrightarrow \frac{AM}{(1+k)a} + \frac{k}{2(1+k)} + \frac{kDP}{2a(1+k)} = \frac{kBN}{2a(1+k)} + \frac{k}{2(1+k)}$$

$$\frac{AM}{(1+k)a} + \frac{kDP}{2a(1+k)} = \frac{kBN}{2a(1+k)}$$

$$AM + \frac{k}{2}DP = \frac{k}{2}BN\ \ (*) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.3p$$

$$G\ centru\ de\ greutate \Leftrightarrow k = 2 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} AM + DP = BN \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..1p$$

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 4.

1. Se dau numerele $x, y, z > 0$ pentru care $x + y + z = 2$.
   a) Să se demonstreze că $\frac{x-y}{xy+2z} + \frac{y-z}{yz+2x} + \frac{z-x}{zx+2y} = 0$.
   b) Să se demonstreze că $\frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} \geq \frac{9}{8}$.

Barem

a)

$\frac{x-y}{xy+2z} + \frac{y-z}{yz+2x} + \frac{z-x}{zx+3y} = \frac{x-y}{xy+(x+y+z)z} + \frac{y-z}{yz+(x+y+z)x} + \frac{z-x}{zx+(x+y+z)y} = \frac{x-y}{(x+z)(y+z)} + \frac{y-z}{(x+y)(x+z)} + \frac{z-x}{(x+y)(y+z)} = \frac{x^2-y^2+y^2-z^2+z^2-x^2}{(x+y)(x+z)(y+z)} = 0$. **3p**

b) $\frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} = \frac{y}{xy+2z} + \frac{z}{yz+2x} + \frac{x}{zx+2y} \Longrightarrow \frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} = \frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{(x+z)(y+z)} + \frac{y+z}{(x+y)(x+z)} + \frac{z+x}{(x+y)(y+z)}\right)$ (1)..**1p**

Notăm. $x + y = a, y + z = b, z + x = c$, $a, b, c > 0$

$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{ab+ac+bc}{abc} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ (2)............................**1p**

$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \frac{3}{a+b+c} \Longrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{4}$ (3)............................**1p**

$\xRightarrow{(1),(2),(3)} \frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} \geq \frac{9}{8}$ **1p**

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 1.

Fie numerele complexe $z_1, z_2, ..., z_{2020}$, fiecare având modulul egal cu 1 și $z_1 + z_2 + ... + z_{2020} = 0$. Să se arate că $\sum_{k=1}^{2020} |z - z_k| \geq 2020\ \forall z \in \mathbb{C}$.

Soluție:

Din $z_1 + z_2 + ... + z_{2020} = 0$ rezultă $\overline{z_1} + \overline{z_2} + ... + \overline{z_{2020}} = 0$, deci $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + ... + \frac{1}{z_{2020}} = 0$ (2p)

$$\sum_{k=1}^{2020} |z - z_k| = \sum_{k=1}^{2020} |z_k| \cdot \left| \frac{z}{z_k} - 1 \right| = \sum_{k=1}^{2020} \left| \frac{z}{z_k} - 1 \right| \quad (2p)$$

Folosind inegalitatea triunghiului avem $\sum_{k=1}^{2020} \left| \frac{z}{z_k} - 1 \right| \geq \left| \sum_{k=1}^{2020} z\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + ... + \frac{1}{z_{20201}} \right) - 2020 \right| = 2020$ (3p)

Notă:

---

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 2.

Determinați $x, y \in (0, +\infty)$ astfel încât

$$\lg^2\left(\frac{x}{y}\right) = 3\lg\left(\frac{x}{2020}\right)\cdot\ \lg\left(\frac{2020}{y}\right)$$

Soluție:

Notăm *lg x – lg 2020 =a* și *lg y – lg 2020 =b*

Avem $\lg\left(\dfrac{x}{y}\right) = \lg x - \lg y = a - b$. (1p)

Ecuația devine $(a - b)^2 = -3ab$, adică $a^2 + ab + b^2 = 0$. (3p)

$\text{dacă } b \neq 0 \text{ atunci avem ecuația } \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0, \text{nu are soluții reale}$

$\text{deci } b = 0$

Soluția unică a acestei ecuații omogene este $a = b = 0$. (2p)

Deci x = y = 2020 . (1p)

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 3.

Rezolvați ecuația $\sqrt[5]{4x-5}+\sqrt[5]{x-2}=\sqrt[5]{2x-1}$ în $\mathbb{R}$

Soluție:

Observăm că x=2 este soluție. (1p)

Deoarece $x=\frac{1}{2}$ nu este soluție, putem împărți ecuația prin $\sqrt[5]{2x-1}$.

Obținem $\sqrt[5]{\frac{4x-5}{2x-1}}+\sqrt[5]{\frac{x-2}{2x-1}}=1$. (1p)

Deoarece $\frac{4x-5}{2x-1}=2-\frac{3}{2x-1}$ și $\frac{x-2}{2x-1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2x-1}\right)$ putem nota $-\frac{3}{2x-1}=t$ (2p)

Ecuația devine $\sqrt[5]{2+t}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}(1+t)}=1$ (*).

Deoarece funcția $f(t)=\sqrt[5]{2+t}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}(1+t)}$ este strict crescătoare pe R , ecuația (*) are soluția unică

t = -1.

Deci x=2 soluție unică. (3p)

Notă:

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 4.

Să se determine funcția $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ care verifică simultan condițiile :

a) $f(x) \leq 5^x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

b) $f(x+y) \leq f(x) \cdot f(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

Soluție :

Logaritmăm în baza 5 ambele relații și obținem :

$\log_5(f(x)) \leq x$ și $\log_5(f(x+y)) \leq \log_5(f(x)) + \log_5(f(y))$ $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$

Notând g(x)= $\log_5(f(x))$ avem $g(x) \leq x$ (1) și $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$ $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ (2)

Din (1) rezultă $g(0) \leq 0$ și din (2) pentru x=y=0 rezultă $g(0) \geq 0$, deci g(0) = 0 ....(2p)

Din (2) pentru y = - x avem $0=g(0) \leq g(x)+g(-x)$, adică $g(x) \geq - g(-x)$ ....(2p)

Din (1) $g(-x) \leq - x$, adică $-g(-x) \geq x$, deci $g(x) \geq x$. ....(2p)

În concluzie g(x)=x, adică $f(x) = 5^x$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$ ....(1p)

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 1.

$Fie\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^*), n \in \mathbb{N}\ impar$

$Dac\breve{a}\ A \cdot A^t = I_n, ar\breve{a}ta\c{t}i\ c\breve{a}\ det(A^2 - I_n) = 0, unde\ A^t\ este\ transpusa\ maticei\ A$

Soluție:

$det(A^2 - I_n) = det(A^2 - A \cdot A^t) = det(A) \cdot det(A - A^t) \quad (1)$ 3p

$Dar\ det(A - A^t) = det(A - A^t)^t = det(A^t - A) = (-1)^n det(A - A^t) = -det(A - A^t)$

$\Rightarrow det(A - A^t) = 0$ 3p

$\overset{(1)}{\Rightarrow} det(A^2 - I_n) = 0$ 1p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 2.

Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ $cu\ a_1 \in (0,1)$ $și\ a_{n+1} = 2^{a_n} - 1\ pentru\ n \geq 1$. Să se calculeze:

$$a.)\ \lim_{n\to\infty} a_n \qquad b.)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Gazeta matematică

Soluție:

a.) Se arată că $a_n \in (0,1),\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

Deoarece $a_{n+1} - a_n = 2^{a_n} - 1 - a_n < 0, \forall\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow șirul\ (a_n)_{n\geq 1}\ este\ strict\ descrescător.$

$deci\ șirul\ (a_n)_{n\geq 1}\ este\ convergent$ 2p

$Fie\ l = \lim_{n\to\infty} a_n$

Trecând la limită în relația de recurență, obținem că $l = 2^l - 1 \quad \Rightarrow l = 0\ \ sau\ l = 1$

Cum șirul este descrescător, *l = 0.* *2p*

b.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{a_n} - 1}{a_n} = \ln 2$$

....3p

Notă:

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 3.

Determinați toate mulțimle $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$ cu proprietățile:

i.) $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *nesingulare*;
ii.) $\forall X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow XY \in \mathcal{A}$.

Soluție:

$Fie\ X \in \mathcal{A}, \quad X \neq I_2 \Rightarrow X^n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists\, p, q \in \mathbb{N}\ a.î.\ X^p = X^q$

$\Rightarrow X^{p-q} = I_2 \Rightarrow I_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow X, I_2 \in \mathcal{A}$ …………………………………………… 2p

1) $Dacă\ X^2 = I_2, fie\ \mathcal{A} = \{I_2, X, Y\} = \{I_2, X, Y^2, XY\} = \{X, I_2, XY\}$
$Deci, XY = Y \Rightarrow Y = I_2, contradicție$ ……………………………………………….. 1p
2) $Dacă\ X^2 \neq I_2\ cum\ X^2 \neq X \Rightarrow X^3 = I_2\ deci, \mathcal{A} = \{I_2, X, X^2\}$ …………………….. 1p

Determinăm toate matricele X cu $X^3 = I_2$

$\det(X) = 1;\ X^2 - Tr(X) \cdot X + I_2 = 0_2 \Rightarrow X^2 = Tr(X) \cdot X - I_2 \Rightarrow$

$X^3 = Tr(X) \cdot X^2 - X \Rightarrow I_2 = Tr(X)(Tr(X)X - I_2) - X \Rightarrow (Tr(x)^2 - 1)X = (Tr(X) + 1)\, I_2$

$Dacă\ Tr(X) = -1 \Rightarrow X^2 + X + I_2 = 0_2$

Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + d = -1 \\ ad - bc = 1 \end{cases} \Rightarrow\ există\ o\ infinitate\ de\ matrice\ X$ ………………… 2p

$Dacă\ Tr(X) \neq -1 \Rightarrow (Tr(X) - 1)X = I_2 \Rightarrow X = \dfrac{1}{Tr(X) - 1} \cdot I_2\ și$

$\det(x) = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{Tr(X) - 1}\right)^2 = 1 \Rightarrow Tr(x) = 2\ sau\ Tr(x) = 0\ caz\ care\ nu\ convine$ ……… 1p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 4.

Fie $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ două funcții monotone. Să se arate că există $c \in (0,1]$ astfel încât:

$$f(c) + g(c) \neq \sin\frac{1}{c}$$

Procedăm prin reducere la absurd

Presupunem
$f(x) + g(x) = \sin\frac{1}{x} \ \forall x \in (0,1]$ ……………………………………………………2p

Fie șirul
$(x_n)_{n\geq 1}\, cu\, x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}\ n \geq 1 \Rightarrow \sin\dfrac{1}{x_n} = (-1)^n \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ $y_n = (-1)^n$ nu este convergent (1) 2p

Fie șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ $și$ $(b_n)_{n\geq 1}$, $unde$ $a_n = f(x_n)$ $și$ $b_n = g(x_n)$ $\forall n \geq 1$ sunt monotone și mărginite, deci convergente. 2p

Așadar $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$, este convergent contradicție cu (1). 1p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 1.

$$Să\ se\ calculeze\ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{\cos x}\cdot dx$$

Soluție:

$$\varphi(x) = 2\pi - x; \quad \varphi^{-1}(x) = 2\pi - x;$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{\cos x}\cdot dx = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{2\pi - x}{\cos x}(-1)\cdot dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{2\pi - x}{\cos x}\cdot dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{2\pi}{\cos x}\cdot dx - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{\cos x}\cdot dx \ldots\ldots 3p$$

$$\Rightarrow I = \pi\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\cdot dx = \pi\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}\cdot dx = -\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t^2 - 1}\cdot dt =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\pi}{2}\ln\left|\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}\right| =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right| = -\frac{\pi}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = -\pi\ln\left(\sqrt{2}+1\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4p$$

Notă:

[1] *Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2] *Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 2.

Pentru $m,n\in N^*$ notăm $I_{m,n}=\int_0^1 x^m tg^n x dx$. Să se calculeze $\lim_{m\to\infty} I_{m,2020}$ și $\lim_{n\to\infty} I_{1,n}$.

Soluție (barem de corectare)

Funcția tangentă este crescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ rezultă că $0\le tgx\le tg1 \quad \forall x\in[0,1]$,

deci $0\le tg^{2020}x\le (tg1)^{2020} \quad \forall x\in[0,1]$ ……………………………………………………………………………1p

Atunci

$0\le I_{m,2020}=\int_0^1 x^m tg^{2020}xdx\le (tg1)^{2020}\int_0^1 x^m dx=\frac{(tg1)^{2020}}{m+1}\to 0,\Rightarrow \lim_{m\to\infty} I_{m,2020}=0$ ……………2p

Fie $\alpha\in R$ astfel încât $\frac{\pi}{4}<\alpha<1$ ………………………………………………………………………………………1p

$I_{1,n}=\int_0^1 xtg^n xdx\ge\int_\alpha^1 xtg^n xdx\ge\alpha\int_\alpha^1 tg^n xdx\ge\alpha\int_\alpha^1 tg^n\alpha dx\ge\alpha=\alpha(1-\alpha)$ … ….. . … .2p

Cum $tg\alpha>1$ și $1-\alpha>0$ avem $\lim_{n\to\infty} I_{1,n}=\infty$ ……………………………………………………………………1p

Notă:

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 3.

Considerăm H_1, H_2, H_3 subgrupuri ale lui $(\mathbb{C}^*, \ \cdot)$ avînd *m*, *n* respectiv *p* elemente, unde *(m,n) = 1*, *(n,p) = 1* și *(m,p) = 1*. Să se determine numărul elementelor mulțimii $H_1 \ \cup \ H_2 \ \cup \ H_3$.

Soluție:

H subgrup cu *n* elemente a lui $(\mathbb{C}^*, \ \cdot)$

$H = \{x_1, x_2, \dots, \ x_n\} \ \Rightarrow \ H = \{xx_1, x\,x_2, \dots, \ xx_n\} = \{x_1, x_2, \dots, \ x_n\} \ pentru \ \forall \, x \ \in H \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ (xx_1)(xx_2)\dots(xx_n) = \ x_1 x_2 \dots \ x_n \ \Rightarrow \ x^n \ = 1 \ \Rightarrow \ H = \ U_n \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..2p$

$Dacă \ (m,n) = 1 \ și \ x_0 \ rădăcină \ comună \ a \ ecuațiilor$

$x^m = 1 \ și \ x^n = 1 \ \Rightarrow \ \exists \, k, l \ \in \ \mathbb{Z} \ și \ \ 1 = km + \ln \ \Rightarrow$

$x_0 = \ x_0^{km+ln} = \ (x_0^m)^k \cdot (x_0^n)^l = 1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.3p$

Dacă notăm *n(A)* numărul de elemente ale mulțimii *A*⟹

$n(H_1 \cup H_2 \cup H_3) =$

$= n(H_1) + \ n(H_2) + \ n(H_3) - n(H_1 \cap H_2) - n(H_1 \cap H_3) - n(H_2 \cap H_3) + n(H_1 \cap H_2 \cap H_3)$

$= m + n + p - 2 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 2p$

Notă:

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 4.

Fie A un inel și $a, b \in A$ cu proprietatea că $a^2 + b^2 = ab$. Să se arate că $(ab)^2 = b^2a^2$ și $(ba)^2 = a^2b^2$.

Soluție (barem de corectare)

Din ipoteză obținem: $a\left(a^2+b^2\right)=a^2b, \left(a^2+b^2\right)b=ab^2$ și prin adunarea celor două avem

$a^3+b^3=0 \quad (1)$ 2p

Din $a^2\left(a^2+b^2\right)=a^3b$ și din (1) obținem $a^2b^2=-a^4-b^4, (2)$ 1p

$b\left(a^2+b^2\right)a=baba \Rightarrow ba^3+b^3a=(ba)^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} (ba)^2=-a^4-b^4$ 1p

$\overset{(2)}{\Rightarrow} (ba)^2=a^2b^2$ 1p

$(ab)^2=\left(a^2+b^2\right)^2=a^4+b^4+a^2b^2+b^2a^2 \overset{(2)}{=} a^4+b^4-a^4-b^4+b^2a^2=b^2a^2$ 2p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*