OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V –a

PROBLEMA 1.

Un număr x de 7 cifre format cu cifrele $0, 1, 2, 3,4$,5 $și$ 6 are proprietățile:

i) Fiecare cifră a numărului x apare în număr exact o dată;
ii) Suma oricăror trei cifre consecutive ale numărului x este divizibilă cu trei;
iii) Oricare două cifre alăturate ale numărului x au parități diferite;
iv) Numărul format din primele două cifre ale numărului x este un număr prim.
Să se afle numărul x.

Barem

Fie x = $\overline{abcdefg}$ numărul căutat.

Deoarece, $\overline{ab}$ este număr prim avem b = 1 sau b = 3. .... *1p*

1. $b = 1 \Rightarrow a = 4 \; sau \; a = 6$ *1*p
   dacă a = 4 și b = 1 atunci nu există c care să verifice condiția ii)..*1p*
   dacă a = 6 și b = 1 atunci c = 2, d = 3, e = 4, f = 5 și g = 0 ....*1p*
   deci x = 6123450
2. $b = 3 \Rightarrow a = 2 \; sau \; a = 4$

dacă a = 2 și b = 3 atunci c =4, d = 5, e = 6, f = 1 și g = 0

X = 2345610, nu verifică condiția ii) *1p*

dacă a = 4 și b = 3 atunci c =2, d = 1, e = 6 , f = 5 și g = 0

x = 4321640, nu verifică condiția ii) *1p*

Singura soluție este x = 6123450. ....*1p*

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

PROBLEMA 2.

Determinați ultima cifră a numărului $4^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)\dots(a_{2019}+a_1)}-1$ unde $a_1, a_2, a_{3,} \dots a_{2019}$ sunt numere naturale nenule.

Gazeta Matematică 6-7-8

Barem

Presupunem că $(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)\dots(a_{2019}+a_1) = impar$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1+a_2 = impar \\ a_2+a_3 = impar \\ a_3+a_4 = impar \\ . \\ . \\ . \\ \underline{a_{2019}+a_1 = impar} \end{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 2p$$

$2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2019}) = impar$(sumă de 2019 termeni impari) Contradicție. *…………………2p*

$\Rightarrow (a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)\dots(a_{2019}+a_1) = par$ *…………………………………………………1p*

$u\left(4^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)\dots(a_{2019}+a_1)}-1\right) = 5$ *…………………………………………………………2p*

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V –a

PROBLEMA 3.

Aflați cifrele a, b, c, x, y dacă $\overline{abc}+\overline{ab}+c=\overline{cxya}$

Soluție (barem de corectare)

Relația se scrie 109a+11b=998 c+100x+10y. 1p

Din a, b cifre avem 109a+11b$\leq 1080 \ => c=1$..1p

Relația devine 109a+11b=998+100x+10y.

Din 109a+11b≤ 1080 și 109a+11b=998+100x+10y.

avem 998+100x+10y≤ 1080 sau 100x+10y≤ 82 , *deci* $x=0$,

Relația devine $109a+11b=998+10y$.

Dacă a≤8 atunci 109a≤ 872 *și din* $11b \leq 99$ *obținem* $109a+11b \leq 971$,

adică 998+10y≤ 971, ...2p

Deci a = 9

Relația devine 981+11b=998+10y sau 11b=17+10y, de unde b=7, și y=6 ....2p

Concluzie a=9, b=7, c=1, x=0,y=6 ....1p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V –a

PROBLEMA 4.

Fie n un număr natural nenul și S_n suma primelor n numere naturale impare care nu sunt divizibile cu 5.
a.) Arătați că dacă n se divide cu 4, atunci S_n se divide cu 5n.
b.) Aflați restul împărțirii lui S_{2020} la 2021.

Soluție (barem de corectare)

a) Numerele impare care nu se divid cu 5 sunt de forma 10k+1, 10k+3, 10k+7, 10k+9, unde k este număr natural. Într-adevăr pentru k=0 numerele sunt 1, 3, 7, 9, pentru k=1, avem 11, 13, 17, 19 numere care nu se divid cu 5..1p.

Deci numărul termenilor se divide cu 4, atunci n=4k+4 și îi putem grupa câte 4 astfel

$$S_n = (1+3+7+9) + (11+13+17+19) + \cdots + (10k+1+10k+3+10k+7+10k+9)$$

$= 20 + 60 + \cdots + (40k+20) = 20[1+3+\cdots+(2k+1)] = 20(k+1)^2 = 5 \cdot 4(k+1)^2 = 5n$, deci S_n se divide cu 5n. 2p

b) Scriem 2020=4·505..1p

Atunci $S_{2020} = 20 \cdot 505^2 = 4 \cdot 5 \cdot 505 \cdot 505 = 4 \cdot 505 \cdot 5 \cdot 505 = 2020 \cdot 2525 = 2020 \cdot (2021+504) = 2020 \cdot 2021 + 2020 \cdot 504 = 2020 \cdot 2021 + (2021-1) \cdot 504 = M_{2021} - 504 = M_{2021} + 1517$ 2p

Restul este 1517..1p

Notă:

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

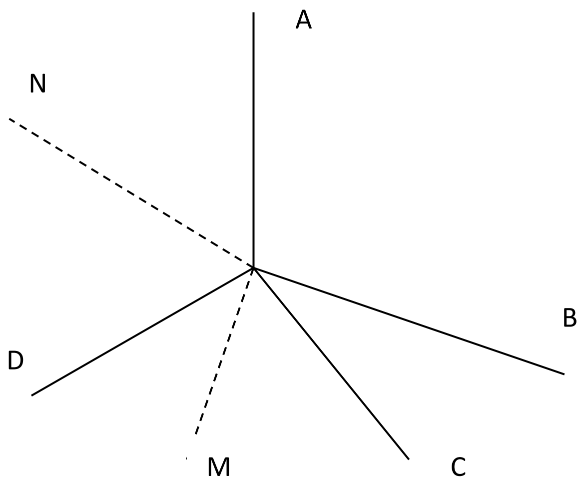
BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI –a

PROBLEMA 1.

În jurul punctului O se formează unghiurile BOC, COD, DOA şi AOB.

Ştiind că măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor COD şi DOA este de 95^0, măsura unghiului COD este două treimi din măsura unghiului AOD şi suplementul unghiului AOB este egal cu complementul unghiului BOC, să se afle măsurile unghiurilor COD, DOA, AOB şi BOC.

Soluție (barem de corectare)



Desen...1 p

Ducem [OM bisectoarea unghiului COD şi [ON bisectoarea unghiului AOD.

$$m(\hat{MON}) = 95^0 \Leftrightarrow m(\hat{MOD}) + m(\hat{DON}) = 95^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m(\hat{COD}) + m(\hat{AOD}) = 190^0 \Rightarrow m(\hat{AOB}) +$$

$+ m(\hat{BOC}) = 170^0$ ....1 p

Notăm $m(\hat{AOB}) = x^0$ şi $m(\hat{BOC}) = y^0$. Deci $x^0 + y^0 = 170^0$. ....1 p

Deoarece suplementul $\hat{AOB}$ este egal cu complementul $\hat{BOC}$ avem:

$180^0 - x^0 = 90^0 - y^0 \Leftrightarrow 180^0 = 90^0 + x^0 - y^0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 180^0 - 90^0 = x^0 - y^0 \Leftrightarrow x^0 - y^0 = 90^0$ …………..1 p

Din $x^0 + y^0 = 170^0$ şi $x^0 - y^0 = 90^0$ se află că $x^0 = 130^0$ şi $y^0 = 40^0$.Deci $m(\hat{AOB}) = 130^0$ şi $m(\hat{BOC}) = 40^0$................1 p

Pentru a afla $m(\hat{COD})$ şi $m(\hat{AOD})$ ţinem cont că $m(\hat{COD}) + m(\hat{AOD}) = 190^0$ şi $m(\hat{COD}) = \frac{2}{3} m(\hat{AOD})$.

Avem $\frac{2}{3} m(\hat{AOD}) + m(\hat{AOD}) = 190^0 \Leftrightarrow 5m(\hat{AOD}) = 570^0 \Leftrightarrow m(\hat{AOD}) = 114^0$ 1p

şi $m(\hat{COD}) = 76^0$............1 p

Notă:

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI –a

PROBLEMA 2.

1. Fie numărul $n = 2020^3$.
   a) Să se descompună n în factori primi.
   b) Să se demonstreze că oricum am alege 9 divizori naturali ai lui n, între ei există doi a căror produs este pătrat perfect.
   c) Să se afle cel mai mic număr natural nenul m astfel încât oricum am alege m divizori ai numărului n între ei să existe doi a căror produs să nu fie pătrat perfect.

Barem

a) $n = 2020^3 = 2^6 \cdot 5^3 \cdot 101^3$ **2p**

b) Un divizor al lui n este de forma $2^x \cdot 5^y \cdot 101^z$, unde y, z sunt numere naturale mai mici sau egale cu 3 iar x număr natural mai mic decât 7.
Fie $d_1 = 2^x \cdot 5^y \cdot 101^z$ și $d_2 = 2^a \cdot 5^b \cdot 101^c$ atunci $d_1 \cdot d_2 = 2^{x+a} \cdot 5^{y+b} \cdot 101^{z+c}$e pătrat perfect dacă și numai dacă $x + a, y + b, z + c$ sunt pare adică x și a au aceeași paritate, y și b au aceeași paritate respectiv z și c au aceeași paritate.......**1p**

Divizorii lui n sunt de forma $2^x \cdot 5^y \cdot 101^z$, în funcție de paritățile lui x, y, z avem 8 grupe posibile:
(1) $x - par, y - par, z - par$
(2) $x - par, y - impar, z - par$
(3) $x - impar, y - par, z - par$
(4) $x - impar, y - impar, z - par$
(5) $x - par, y - par, z - impar$
(6) $x - par, y - impar, , z - impar$
(7) $x - impar, y - par, z - impar$
(8) $x - impar, y - impar, z - impar$ ……………………………..**1p**
Deci oricum am alege 9 divizori între ei există doi care se află în aceeași grupă deci produsul lor este pătrat perfect…………………………………………….**1p**

c) De la 0 până la 3 avem 2 numere pare și 2 numere impare, iar de la 0 până la 6 avem 4 numere pare și 3 numere impare deci cele mai multe elemente le avem în grupele $(1), (2), (5), (6)$ unde avem $4 \cdot 2 \cdot 2$ adică16 numere.
Dacă am alege cel mult 16 divizori ar fi posibil ca toți să fie din aceeași grupă deci produsul oricăror doi să fie pătrat perfect…………………………….**1p**
Oricum alegem 17 vor exista cel puțin doi care să se afle în grupe diferite deci produsul lor nu va fi pătrat perfect
Deci $m = 17$. **1p**

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI –a

PROBLEMA 3.

Se consideră mulțimile $A=\{ 3p+2 \mid p \in \mathbb{N} \}$, $B=\{ 5k+4 \mid k \in \mathbb{N} \}$ și $C=\{ 15m+14 \mid m \in \mathbb{N} \}$.

a) Verificați dacă numerele 14 și 29 aparțin mulțimii $A \cap B$.
b) Arătați că $A \cap B = C$.
c) Aflați câte numere x îndeplinesc condițiile $x \in C$ și $500 \leq x \leq 1000$.

Soluție (barem de corectare)

a) $14 = \mathbf{3}\times 4+\mathbf{2}$ și $14 = \mathbf{5}\times 2+\mathbf{4} \Longrightarrow 14 \in A \cap B$...1p
$29 = \mathbf{3}\times 7+\mathbf{2}$ și $29 = \mathbf{5}\times 5+\mathbf{4} \Longrightarrow 29 \in A \cap B$...1p

b) Fie $x \in A \cap B \Longrightarrow x = 3p+2=5k+4 \Longrightarrow 3p=5k+2 \Longrightarrow 3p=5(k-2)+12 \Longrightarrow 3(p-4)=5(k-2)$................1p

$p-4 \in M_5 \Longrightarrow p \in M_5+4 \Longrightarrow x \in M_{15} + 14 \Longrightarrow x \in C$ 1p

Fie $x \in C \Rightarrow x = 3 \cdot (5m+4) + 2 \in A$ și $x = 5 \cdot (3m+2) + 4 \in B \Rightarrow A \cap B = C$ 1p

c) $500 \leq 15m+14 \leq 1000$...1p

$32,4 \leq m \leq 65,7(3)$, $m \in \{ 33,34,....,65 \}$, sunt 33 numere..1p

Notă:

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI –a

PROBLEMA 4.

Se consideră numerele strict pozitive și distincte $x_1, x_2, \dots, x_{63}$ astfel încât

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{63}} > 6.$$

Arătați că cel puțin unul dintre aceste numere nu este natural.

Soluție:

Presupunem că $x_1, x_2, \dots, x_{63} \in \mathbb{N}$ și fiind distincte fără a restrînge generalitatea considerăm că

$x_1 < x_2 < \dots < x_{63} \Rightarrow x_1 \geq 1;\ x_2 \geq 2; \dots\ x_{63} \geq 63$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{63}} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{63} = S_1$$

$$S_1 = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{15}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{31}\right) + \left(\frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{63}\right)$$

$$S_1 < 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \frac{1}{16} \cdot 16 + \frac{1}{32} \cdot 32 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$$

$\Rightarrow S < 6$ contradicție $\Rightarrow$ cel puțin un număr nu este natural.

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*