

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V –a

PROBLEMA 1.

Un număr x de 7 cifre format cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5 și 6 are proprietățile:

- i) Fiecare cifră a numărului x apare în număr exact o dată;
 - ii) Suma oricăror trei cifre consecutive ale numărului x este divizibilă cu trei;
 - iii) Oricare două cifre alăturate ale numărului x au parități diferite;
 - iv) Numărul format din primele două cifre ale numărului x este un număr prim.
- Să se afle numărul x .

Barem

Fie $x = \overline{abcdefg}$ numărul căutat.

Deoarece, \overline{ab} este număr prim avem $b = 1$ sau $b = 3$ 1p

1. $b = 1 \Rightarrow a = 4$ sau $a = 6$ 1p

dacă $a = 4$ și $b = 1$ atunci nu există c care să verifice condiția ii).....1p

dacă $a = 6$ și $b = 1$ atunci $c = 2, d = 3, e = 4, f = 5$ și $g = 0$ 1p

deci $x = 6123450$

2. $b = 3 \Rightarrow a = 2$ sau $a = 4$

dacă $a = 2$ și $b = 3$ atunci $c = 4, d = 5, e = 6, f = 1$ și $g = 0$

$X = 2345610$, nu verifică condiția ii)1p

dacă $a = 4$ și $b = 3$ atunci $c = 2, d = 1, e = 6, f = 5$ și $g = 0$

$x = 4321640$, nu verifică condiția ii)1p

Singura soluție este $x = 6123450$1p

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V –a

PROBLEMA 2.

Determinați ultima cifră a numărului $4^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)\dots(a_{2019}+a_1)} - 1$ unde $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2019}$ sunt numere naturale nenule.

Gazeta Matematică 6-7-8

Barem

Presupunem că $(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)(a_3 + a_4) \dots (a_{2019} + a_1) = \text{impar}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = \text{impar} \\ a_2 + a_3 = \text{impar} \\ a_3 + a_4 = \text{impar} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{2019} + a_1 = \text{impar} \end{cases} \dots \dots \dots 2p$$

$$2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2019}) = \text{impar}(\text{sumă de 2019 termeni impari}) \text{ Contradicție.} \dots \dots \dots 2p$$

$$\Rightarrow (a_1 + a_2)(a_2 + a_3)(a_3 + a_4) \dots (a_{2019} + a_1) = \text{par} \dots \dots \dots 1p$$

$$u(4^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)\dots(a_{2019}+a_1)} - 1) = 5 \dots \dots \dots 2p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V –a

PROBLEMA 3.

Aflați cifrele a, b, c, x, y dacă $\overline{abc} + \overline{ab} + c = \overline{cxya}$

Soluție (barem de corectare)

Relația se scrie $109a+11b=998c+100x+10y$1p

Din a, b cifre avem $109a+11b \leq 1080 \Rightarrow c = 1$1p

Relația devine $109a+11b=998+100x+10y$.

Din $109a+11b \leq 1080$ și $109a+11b=998+100x+10y$.

avem $998+100x+10y \leq 1080$ sau $100x+10y \leq 82$, deci $x = 0$,

Relația devine $109a + 11b = 998 + 10y$.

Dacă $a \leq 8$ atunci $109a \leq 872$ și din $11b \leq 99$ obținem $109a + 11b \leq 971$,

adică $998+10y \leq 971$,2p

Deci $a = 9$

Relația devine $981+11b=998+10y$ sau $11b=17+10y$, de unde $b=7$, și $y=6$ 2p

Concluzie $a=9, b=7, c=1, x=0, y=6$ 1p

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V –a

PROBLEMA 4.

Fie n un număr natural nenul și S_n suma primelor n numere naturale impare care nu sunt divizibile cu 5.

a.) Arătați că dacă n se divide cu 4, atunci S_n se divide cu $5n$.

b.) Aflați restul împărțirii lui S_{2020} la 2021.

Soluție (barem de corectare)

a) Numerele impare care nu se divid cu 5 sunt de forma $10k+1, 10k+3, 10k+7, 10k+9$, unde k este număr natural. Într-adevăr pentru $k=0$ numerele sunt 1, 3, 7, 9, pentru $k=1$, avem 11, 13, 17, 19 numere care nu se divid cu 5.....1p.

Deci numărul termenilor se divide cu 4, atunci $n=4k+4$ și îi putem grupa câte 4 astfel

$$\begin{aligned} S_n &= (1 + 3 + 7 + 9) + (11 + 13 + 17 + 19) + \dots + (10k + 1 + 10k + 3 + 10k + 7 + 10k + 9) \\ &= 20 + 60 + \dots + (40k + 20) = 20[1 + 3 + \dots + (2k + 1)] = 20(k + 1)^2 = 5 \cdot 4(k + 1)^2 = 5n, \text{ deci} \\ S_n &\text{ se divide cu } 5n. \dots\dots\dots 2p \end{aligned}$$

b) Scriem $2020=4 \cdot 505$1p

$$\begin{aligned} \text{Atunci } S_{2020} &= 20 \cdot 505^2 = 4 \cdot 5 \cdot 505 \cdot 505 = 4 \cdot 505 \cdot 5 \cdot 505 = 2020 \cdot 2525 = 2020 \cdot \\ &(2021 + 504) = 2020 \cdot 2021 + 2020 \cdot 504 = 2020 \cdot 2021 + (2021 - 1) \cdot 504 = M_{2021} - 504 = \\ &M_{2021} + 1517 \dots\dots\dots 2p \end{aligned}$$

Restul este 1517.....1p

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

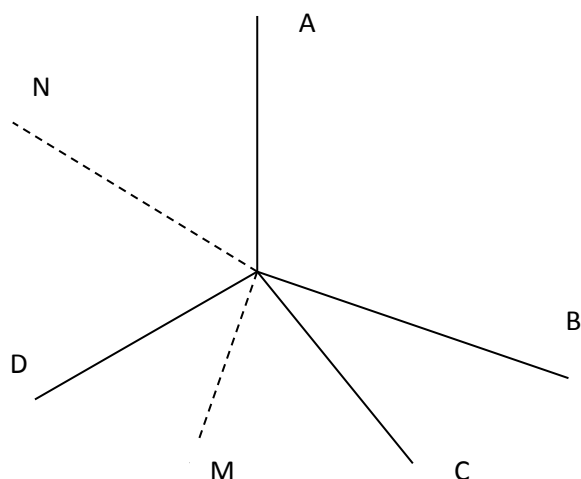
BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI –a

PROBLEMA 1.

În jurul punctului O se formează unghiurile BOC, COD, DOA și AOB.

Știind că măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor COD și DOA este de 95° , măsura unghiului COD este două treimi din măsura unghiului AOD și suplementul unghiului AOB este egal cu complementul unghiului BOC, să se afle măsurile unghiurilor COD, DOA, AOB și BOC.

Soluție (barem de corectare)



Desen.....1 p

Ducem [OM bisectoarea unghiului COD și [ON bisectoarea unghiului AOD.

$$m(\widehat{MON}) = 95^{\circ} \Leftrightarrow m(\widehat{MOD}) + m(\widehat{DON}) = 95^{\circ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m(\widehat{COD}) + m(\widehat{AOD}) = 190^{\circ} \Rightarrow m(\widehat{AOB}) +$$

$$+ m(\widehat{BOC}) = 170^{\circ} \dots\dots\dots 1 p$$

Notăm $m(\widehat{AOB}) = x^{\circ}$ și $m(\widehat{BOC}) = y^{\circ}$. Deci

$$x^{\circ} + y^{\circ} = 170^{\circ} \dots\dots\dots 1 p$$

Deoarece suplementul \widehat{AOB} este egal cu complementul \widehat{BOC} avem:

$$180^{\circ} - x^{\circ} = 90^{\circ} - y^{\circ} \Leftrightarrow 180^{\circ} = 90^{\circ} + x^{\circ} - y^{\circ} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 180^{\circ} - 90^{\circ} = x^{\circ} - y^{\circ} \Leftrightarrow x^{\circ} - y^{\circ} = 90^{\circ} \dots\dots\dots 1 p$$

Din $x^{\circ} + y^{\circ} = 170^{\circ}$ și $x^{\circ} - y^{\circ} = 90^{\circ}$ se află că $x^{\circ} = 130^{\circ}$ și $y^{\circ} = 40^{\circ}$. Deci $m(\widehat{AOB}) = 130^{\circ}$ și $m(\widehat{BOC}) = 40^{\circ} \dots\dots\dots 1 p$

Pentru a afla $m(\widehat{COD})$ și $m(\widehat{AOD})$ ținem cont că $m(\widehat{COD}) + m(\widehat{AOD}) = 190^{\circ}$ și $m(\widehat{COD}) = \frac{2}{3}m(\widehat{AOD})$.

$$\text{Avem } \frac{2}{3}m(\widehat{AOD}) + m(\widehat{AOD}) = 190^{\circ} \Leftrightarrow 5m(\widehat{AOD}) = 570^{\circ} \Leftrightarrow m(\widehat{AOD}) = 114^{\circ} \dots\dots\dots 1 p$$

$$\text{și } m(\widehat{COD}) = 76^{\circ} \dots\dots\dots 1 p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI –a

PROBLEMA 2.

1. Fie numărul $n = 2020^3$.
 - a) Să se descompună n în factori primi.
 - b) Să se demonstreze că oricum am alege 9 divizori naturali ai lui n , între ei există doi a căror produs este pătrat perfect.
 - c) Să se afle cel mai mic număr natural nenul m astfel încât oricum am alege m divizori ai numărului n între ei să existe doi a căror produs să nu fie pătrat perfect.

Barem

- a) $n = 2020^3 = 2^6 \cdot 5^3 \cdot 101^3$ **2p**
- b) Un divizor al lui n este de forma $2^x \cdot 5^y \cdot 101^z$, unde y, z sunt numere naturale mai mici sau egale cu 3 iar x număr natural mai mic decât 7.
Fie $d_1 = 2^x \cdot 5^y \cdot 101^z$ și $d_2 = 2^a \cdot 5^b \cdot 101^c$ atunci $d_1 \cdot d_2 = 2^{x+a} \cdot 5^{y+b} \cdot 101^{z+c}$ e pătrat perfect dacă și numai dacă $x + a, y + b, z + c$ sunt pare adică x și a au aceeași paritate, y și b au aceeași paritate respectiv z și c au aceeași paritate.....**1p**

Divizorii lui n sunt de forma $2^x \cdot 5^y \cdot 101^z$, în funcție de paritățile lui x, y, z avem 8 grupe posibile:

- (1) $x - par, y - par, z - par$
- (2) $x - par, y - impar, z - par$
- (3) $x - impar, y - par, z - par$
- (4) $x - impar, y - impar, z - par$
- (5) $x - par, y - par, z - impar$
- (6) $x - par, y - impar, z - impar$
- (7) $x - impar, y - par, z - impar$
- (8) $x - impar, y - impar, z - impar$ **1p**

Deci oricum am alege 9 divizori între ei există doi care se află în aceeași grupă deci produsul lor este pătrat perfect.....**1p**

- c) De la 0 până la 3 avem 2 numere pare și 2 numere impare, iar de la 0 până la 6 avem 4 numere pare și 3 numere impare deci cele mai multe elemente le avem în grupele (1), (2), (5), (6) unde avem $4 \cdot 2 \cdot 2$ adică 16 numere.

Dacă am alege cel mult 16 divizori ar fi posibil ca toți să fie din aceeași grupă deci produsul oricăror doi să fie pătrat perfect.....**1p**

Oricum alegem 17 vor exista cel puțin doi care să se afle în grupe diferite deci produsul lor nu va fi pătrat perfect

Deci $m = 17$. **1p**

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI –a

PROBLEMA 3.

Se consideră mulțimile $A = \{ 3p+2 \mid p \in \mathbb{N} \}$, $B = \{ 5k+4 \mid k \in \mathbb{N} \}$ și $C = \{ 15m+14 \mid m \in \mathbb{N} \}$.

- Verificați dacă numerele 14 și 29 aparțin mulțimii $A \cap B$.
- Arătați că $A \cap B = C$.
- Aflați câte numere x îndeplinesc condițiile $x \in C$ și $500 \leq x \leq 1000$.

Soluție (barem de corectare)

- $14 = 3 \times 4 + 2$ și $14 = 5 \times 2 + 4 \Rightarrow 14 \in A \cap B$ 1p
 $29 = 3 \times 7 + 2$ și $29 = 5 \times 5 + 4 \Rightarrow 29 \in A \cap B$ 1p
- Fie $x \in A \cap B \Rightarrow x = 3p+2 = 5k+4 \Rightarrow 3p = 5k+2 \Rightarrow 3p = 5(k-2)+12 \Rightarrow 3(p-4) = 5(k-2)$ 1p
 $p-4 \in M_5 \Rightarrow p \in M_{5+4} \Rightarrow x \in M_{15} + 14 \Rightarrow x \in C$ 1p
Fie $x \in C \Rightarrow x = 3 \cdot (5m + 4) + 2 \in A$ și $x = 5 \cdot (3m + 2) + 4 \in B \Rightarrow A \cap B = C$ 1p
- $500 \leq 15m+14 \leq 1000$ 1p
 $32,4 \leq m \leq 65,7(3)$, $m \in \{ 33,34, \dots, 65 \}$, sunt 33 numere 1p

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI –a

PROBLEMA 4.

Se consideră numerele strict pozitive și distincte x_1, x_2, \dots, x_{63} astfel încât

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{63}} > 6.$$

Arătați că cel puțin unul dintre aceste numere nu este natural.

Soluție:

Presupunem că $x_1, x_2, \dots, x_{63} \in \mathbb{N}$ și fiind distincte fără a restrânge generalitatea considerăm că

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{63} \Rightarrow x_1 \geq 1; x_2 \geq 2; \dots x_{63} \geq 63 \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{63}} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{63} = S_1 \dots\dots\dots 1p$$

$$S_1 = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{31}\right) + \left(\frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{63}\right)$$

$$S_1 < 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \frac{1}{16} \cdot 16 + \frac{1}{32} \cdot 32 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 \dots\dots\dots 3p$$

$$\Rightarrow S < 6 \text{ contradicție} \Rightarrow \text{cel puțin un număr nu este natural.} \dots\dots\dots 1p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII –a

PROBLEMA 1.

Punctul D este în interiorul triunghiului ABC , astfel încât unghiurile BAC și BDC sunt suplementare, (BE este bisectoarea $\sphericalangle ABD$ și (CE este bisectoarea $\sphericalangle ACD$).

Aflați $m(\sphericalangle BEC)$.

Soluție:

$$m(\sphericalangle ABE) = m(\sphericalangle DBE) = a$$

$$m(\sphericalangle ACE) = m(\sphericalangle DCE) = b$$

$$m(\sphericalangle DBC) = x; m(\sphericalangle DCB) = y$$

$$\Rightarrow x + y = m(\sphericalangle A) \dots\dots\dots 3p$$

$$2a + 2b + 2x + 2y = 180^\circ$$

$$\Rightarrow a + b + x + y = 90^\circ \dots\dots\dots 3p$$

$$\Rightarrow m(\sphericalangle E) = 90^\circ \dots\dots\dots 1p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII –a

PROBLEMA 2.

Fie $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$ iar m și n divizori ai lui a cu $m < n$.

Arătați că $a \cdot (n - m) > m^2$ (1)

Soluție :

$$a = m \cdot p \text{ și } a = n \cdot q \Rightarrow p > q \Rightarrow p - 1 \geq q \quad 2p$$

$$(1) \Leftrightarrow m \cdot p(n - m) > m^2$$

$$\Leftrightarrow pn - pm > m$$

$$\Leftrightarrow pn > m(p + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{p + 1} > \frac{m}{n} \quad (2) \quad 2p$$

$$\text{dar } \frac{m}{n} = \frac{q}{p} \Rightarrow (2) \Leftrightarrow \frac{p}{p + 1} > \frac{q}{p}$$

$$\text{dar } p - 1 \geq q \Rightarrow \frac{p - 1}{p} \geq \frac{q}{p} \quad 2p$$

$$\text{dar } \frac{p}{p + 1} > \frac{p - 1}{p} \Rightarrow \frac{p}{p + 1} > \frac{q}{p} \Rightarrow (1) \quad 1p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

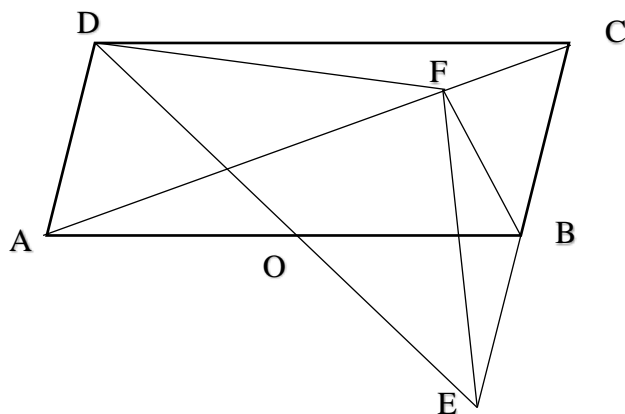
BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII –a

PROBLEMA 3.

Se consideră paralelogramul $ABCD$, E simetricul lui C față de B și $BF \perp AC$, $F \in AC$.

Știind că $DF \perp FE$ calculați $\frac{2DC + 3DE}{5DC + DE}$

Soluție:



$ABCD$ paralelogram; $AB \cap DE = \{O\}$

1p

$OF = \frac{AB}{2}$; $OF = \frac{DE}{2} \Rightarrow AB = DE \Rightarrow ABCD$ dreptunghi

3p

$\Rightarrow DB \perp EC \Rightarrow DCE$ isoscel $\Rightarrow DC = DE$

2p

\Rightarrow raportul este $\frac{5}{6}$

1p

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII –a

PROBLEMA 4.

Fie numerele întregi $x_1, x_2, \dots, x_{2022}$ astfel în cât $\{x_1; x_2; \dots; x_{2022}\} = \{1; 2; \dots; 2022\}$.

Arătați că printre numerele: $|x_1 - 1|; |x_2 - 2|; |x_3 - 3|; \dots; |x_{2022} - 2022|$

există cel puțin două egale.

Soluție

Presupunem că numerele $|x_1 - 1|; |x_2 - 2|; |x_3 - 3|; \dots; |x_{2022} - 2022|$ sunt diferite două câte două

\Rightarrow mulțimea lor este $\{0; 1; 2; \dots; 2021\}$ 2p

Fie $S_1 = |x_1 - 1| + |x_2 - 2| + |x_3 - 3| + \dots + |x_{2022} - 2022| = 2021 \cdot 1011$ număr impar

și $S_2 = x_1 - 1 + x_2 - 2 + \dots + x_{2022} - 2022 = 0$ 2p

Dar $|x_i - i|$ și $x_i - i$ au aceeași paritate

$\Rightarrow S_1$ și S_2 au aceeași paritate \Rightarrow contradicție 2p

$\Rightarrow |x_1 - 1|; |x_2 - 2|; |x_3 - 3|; \dots; |x_{2022} - 2022|$ nu pot fi diferite două câte două. 1p

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

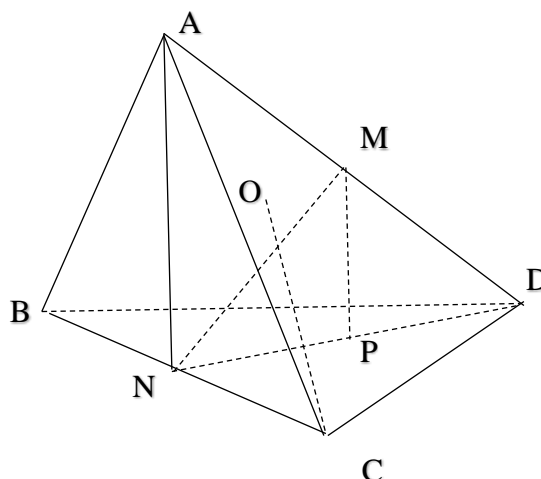
BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII –a

PROBLEMA 1.

Fie tetraedrul regulat $ABCD$ cu lungimea muchiei de 10 cm. Fie M mijlocul muchiei $[AD]$, N mijlocul muchiei $[BC]$ și P mijlocul segmentului $[DN]$. Determinați:

- Poziția dreptei MP față de planul (ABC) ;
- Măsura unghiului format de dreptele MN și BC ;
- Distanța de la punctul C la planul (ABD) .

Soluție:



- MP linie mijlocie în $\Delta ADN \Rightarrow MP \parallel AN \Rightarrow NP \parallel (ABC)$ 2p
- ΔBCD echilateral și DN mediană $\Rightarrow DN$ înălțime $\Rightarrow BC \perp DN$
analog $BC \perp AN$, deci $BC \perp (AND)$
 $MN \subset (AND) \Rightarrow BC \perp MN \Rightarrow m(\widehat{BC, MN}) = 90^\circ$ 2p
- Fie $CO \perp (ABD)$, $O \in (ABD)$, ΔABD echilateral $\Rightarrow OA = OB = OD = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm
Folosind teorema lui Pitagora în ΔAOC obținem $CO = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ cm3p

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII –a

PROBLEMA 2.

Să se rezolve în \mathbb{Z} ecuația:

$$7x^2 + 8x + 1 = 4^{2x}$$

Soluție:

Pentru $x < 0 \Rightarrow 4^{2x} \notin \mathbb{Z}$ 1p

Fie $x \geq 0$

Ecuția se scrie:

$$(7x + 1)(x + 1) = 2^{4x} \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow x + 1 = 2^m$$

$$\Rightarrow 7x + 1 = 2^n; \text{ cu } n \geq m \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow \frac{7x + 1}{x + 1} = 2^{n-m} \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow x + 1 \mid 6; \text{ dar } x + 1 = 2^m \Rightarrow x + 1 \in \{1; 2\} \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Pentru } x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Pentru } x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1. \text{ Ambele sunt soluții.} \quad \dots\dots\dots 1p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII –a

PROBLEMA 3.

Se dau numerele reale $x, y, z > 0$, diferite de 3. Dacă $x + y + z = 3$ arătați că:

$$F(x, y, z) = \frac{x - y}{xy + 3z} + \frac{y - z}{yz + 3x} + \frac{z - x}{zx + 3y}$$

este constantă.

G.M. nr. 12/2019

Soluție:

Înlocuim $z = 3 - x - y$ în prima fracție, obținem:

$$\frac{x - y}{xy + 3(3 - x - y)} = \frac{x - y}{xy - 3x - 3y + 9} = \frac{x - y}{(x - 3)(y - 3)}$$

Analog

$$\frac{y - z}{yz + 3x} = \frac{y - z}{(y - 3)(z - 3)}$$

$$\frac{z - x}{zx + 3y} = \frac{z - x}{(z - 3)(x - 3)} \dots \dots \dots 4p$$

Ca urmare:

$$F(x, y, z) = \frac{(x - y)(z - 3) + (y - z)(x - 3) + (z - x)(y - 3)}{(x - 3)(y - 3)(z - 3)}$$

$$\Rightarrow F(x, y, z) = 0 \quad \forall x, y, z \quad \dots \dots \dots 3p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII –a

PROBLEMA 4.

În fiecare din vârfurile unui cub se pune câte un singur fruct. Fructul poate fi banană, portocală sau măr. Prin „platou” se înțelege orice plan care conține 4 dintre vârfurile cubului. Stabiliți dacă există o așezare a fructelor astfel încât fiecare platou să conțină toate cele 3 tipuri de fructe. Justificați răspunsul.

Soluție:

Notăm cubul $ABCD A' B' C' D'$.

Considerăm că în A și B avem fructe de același fel, de exemplu banane.

Rezultă că în C și D avem măr și portocală sau invers. Analog în A' și B' , deci planul $(CDA' B')$ nu conține banane.

Rezultă că nu se poate ca pe o muchie să avem două fructe de același fel. 4p

Analizăm cazul în care în A și B sunt fructe diferite, de exemplu măr în A și banană în B .

Fiecare din planele $(ABCD)$, $(ABB'A')$ și $(ABC'D')$ va conține o singură portocală. Deci în 3 dintre vârfurile C, D, A', B', C', D' vor fi portocale, iar în celelalte 3 vor fi două mere și o banană, sau două banane și un măr.

Dacă sunt două mere și o banană atunci vor exista două muchii paralele care nu conțin banană, deci imposibil.

Dacă sunt două banane și un măr atunci există două muchii paralele care conțin măr.

Deci nu este posibil ca toate platourile să conțină toate tipurile de fructe. 3p

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 1.

Să se determine funcțiile $f: N^* \rightarrow R$ cu proprietatea :

$$f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + \dots + n \cdot f(n) = f(n+1) - 1, \forall n \in N^*$$

Soluție.

Pentru $n=1$ relația devine $f(2) = 1 + f(1)$. (1 punct)

Pentru $n=2$ relația devine $f(1) + 2f(2) = f(3) - 1 \Leftrightarrow f(3) = 3(1 + f(1))$. (1 punct)

Pentru $n=3$ relația dată conduce la $f(4) = 12 \cdot (1 + f(1))$. (1 punct)

Prin inducție se arată că $f(n) = \frac{n!}{2}(1 + f(1))$, pentru orice $n \geq 2$. (unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$)
(3 puncte)

Notând $f(1)=a$, unde a este un număr real, rezultă că funcțiile căutate sunt:

$$f: N^* \rightarrow R, f(n) = \begin{cases} a, & n = 1 \\ \frac{n!(a+1)}{2}, & n \geq 2 \end{cases} \quad (1 \text{ punct })$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 2.

Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația:

$$\sqrt{x^2 + 31x} + \sqrt{x + 31} = x + \sqrt{x} + 8$$

Soluție:

$$\sqrt{x(x + 31)} + \sqrt{x + 31} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) + 8$$

$$\sqrt{x + 31} (\sqrt{x} + 1) = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) + 8$$

$$(\sqrt{x} + 1) (\sqrt{x + 31} - \sqrt{x}) = 8 \quad 2p$$

$$\text{notăm } a = \sqrt{x + 31} \text{ și } b = \sqrt{x}$$

$$\begin{cases} (b + 1)(a - b) = 8 \\ a^2 - b^2 = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b + 1)(a - b) = 8 \\ (a - b)(a + b) = 31 \end{cases} \quad 2p$$

$$\text{dar } a \neq b \Rightarrow \frac{b + 1}{a + b} = \frac{8}{31} \Leftrightarrow a = \frac{23b + 31}{8} \Rightarrow 15b^2 + 46b - 33 = 0 \quad 2p$$

$$b_1 = -\frac{11}{3}, \quad b_2 = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{9}{25} \quad 1p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 3.

Fie rombul $ABCD$ și punctele $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CD)$. Să se arate că centrul de greutate al triunghiului MNP aparține dreptei AC dacă și numai dacă $AM + DP = BN$.

Soluție:

Fie R mijlocul lui $[NP]$ iar $MR \cap AC = \{G\}$

Considerăm $\frac{MG}{GR} = k, AB = a, \dots\dots\dots 1p$

$$\begin{aligned}\vec{AG} &= \frac{1}{1+k} \vec{AM} + \frac{k}{1+k} \vec{AR} = \frac{1}{1+k} \frac{AM}{a} \vec{AB} + \frac{k}{1+k} \frac{1}{2} (\vec{AN} + \vec{AP}) \\ &= \frac{1}{1+k} \frac{AM}{a} \vec{AB} + \frac{k}{2(1+k)} (\vec{AB} + \vec{BN}) + \frac{k}{2(1+k)} (\vec{AD} + \vec{DP}) \\ &= \frac{AM}{(1+k)a} \vec{AB} + \frac{k}{2(1+k)} \vec{AB} + \frac{k}{2(1+k)} \frac{BN}{a} \vec{BC} + \frac{k}{2(1+k)} \vec{AD} + \frac{k}{2(1+k)} \frac{DP}{a} \vec{DC} \\ &= \left(\frac{AM}{(1+k)a} + \frac{k}{2(1+k)} + \frac{kDP}{2a(1+k)} \right) \cdot \vec{AB} + \left(\frac{kBN}{2a(1+k)} + \frac{k}{2(1+k)} \right) \cdot \vec{AD} \dots\dots\dots 2p\end{aligned}$$

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$$

$$\vec{AG}, \vec{AC} \text{ coliniari} \Leftrightarrow \frac{AM}{(1+k)a} + \frac{k}{2(1+k)} + \frac{kDP}{2a(1+k)} = \frac{kBN}{2a(1+k)} + \frac{k}{2(1+k)}$$

$$\frac{AM}{(1+k)a} + \frac{kDP}{2a(1+k)} = \frac{kBN}{2a(1+k)}$$

$$AM + \frac{k}{2} DP = \frac{k}{2} BN \quad (*) \dots\dots\dots 3p$$

$$G \text{ centru de greutate} \Leftrightarrow k = 2 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} AM + DP = BN \dots\dots\dots 1p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 4.

1. Se dau numerele $x, y, z > 0$ pentru care $x + y + z = 2$.

a) Să se demonstreze că $\frac{x-y}{xy+2z} + \frac{y-z}{yz+2x} + \frac{z-x}{zx+2y} = 0$.

b) Să se demonstreze că $\frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} \geq \frac{9}{8}$.

Barem

a)

$$\frac{x-y}{xy+2z} + \frac{y-z}{yz+2x} + \frac{z-x}{zx+2y} = \frac{x-y}{xy+(x+y+z)z} + \frac{y-z}{yz+(x+y+z)x} + \frac{z-x}{zx+(x+y+z)y} = \frac{x-y}{(x+z)(y+z)} + \frac{y-z}{(x+y)(x+z)} + \frac{z-x}{(x+y)(y+z)} = \frac{x^2-y^2+y^2-z^2+z^2-x^2}{(x+y)(y+z)(x+y)(x+z)(y+z)} = 0. \dots\dots\dots 3p$$

b) $\frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} = \frac{y}{xy+2z} + \frac{z}{yz+2x} + \frac{x}{zx+2y} \Rightarrow \frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} = \frac{1}{2} \left(\frac{x+y}{(x+z)(y+z)} + \frac{y+z}{(x+y)(x+z)} + \frac{z+x}{(x+y)(y+z)} \right) (1) \dots\dots\dots 1p$

Notăm. $x + y = a, y + z = b, z + x = c, a, b, c > 0$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{ab+ac+bc}{abc} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) (2) \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \geq \frac{3}{a+b+c} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{4} (3) \dots\dots\dots 1p$$

$$\xrightarrow{(1),(2),(3)} \frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} \geq \frac{9}{8} \dots\dots\dots 1p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 1.

Fie numerele complexe $z_1, z_2, \dots, z_{2020}$, fiecare având modulul egal cu 1 și $z_1 + z_2 + \dots + z_{2020} = 0$. Să se

arate că $\sum_{k=1}^{2020} |z - z_k| \geq 2020 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Soluție:

Din $z_1 + z_2 + \dots + z_{2020} = 0$ rezultă $\overline{z_1} + \overline{z_2} + \dots + \overline{z_{2020}} = 0$, deci $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_{2020}} = 0$ (2p)

$$\sum_{k=1}^{2020} |z - z_k| = \sum_{k=1}^{2020} |z_k| \cdot \left| \frac{z}{z_k} - 1 \right| = \sum_{k=1}^{2020} \left| \frac{z}{z_k} - 1 \right| \quad (2p)$$

Folosind inegalitatea triunghiului avem $\sum_{k=1}^{2020} \left| \frac{z}{z_k} - 1 \right| \geq \left| \sum_{k=1}^{2020} z \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_{2020}} \right) - 2020 \right| = 2020$ (3p)

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 2.

Determinați $x, y \in (0, +\infty)$ astfel încât

$$\lg^2\left(\frac{x}{y}\right) = 3 \lg\left(\frac{x}{2020}\right) \cdot \lg\left(\frac{2020}{y}\right)$$

Soluție:

Notăm $\lg x - \lg 2020 = a$ și $\lg y - \lg 2020 = b$

Avem $\lg\left(\frac{x}{y}\right) = \lg x - \lg y = a - b$. (1p)

Ecuția devine $(a - b)^2 = -3ab$, adică $a^2 + ab + b^2 = 0$. (3p)

dacă $b \neq 0$ atunci avem ecuația $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0$, nu are soluții reale

deci $b = 0$

Soluția unică a acestei ecuații omogene este $a = b = 0$. (2p)

Deci $x = y = 2020$. (1p)

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 3.

Rezolvați ecuația $\sqrt[5]{4x-5} + \sqrt[5]{x-2} = \sqrt[5]{2x-1}$ în \mathbb{R}

Soluție:

Observăm că $x=2$ este soluție. (1p)

Deoarece $x = \frac{1}{2}$ nu este soluție, putem împărți ecuația prin $\sqrt[5]{2x-1}$.

$$\text{Obținem } \sqrt[5]{\frac{4x-5}{2x-1}} + \sqrt[5]{\frac{x-2}{2x-1}} = 1. \quad (1p)$$

Deoarece $\frac{4x-5}{2x-1} = 2 - \frac{3}{2x-1}$ și $\frac{x-2}{2x-1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2x-1}\right)$ putem nota $-\frac{3}{2x-1} = t$ (2p)

Ecuația devine $\sqrt[5]{2+t} + \sqrt[5]{\frac{1}{2}(1+t)} = 1$ (*).

Deoarece funcția $f(t) = \sqrt[5]{2+t} + \sqrt[5]{\frac{1}{2}(1+t)}$ este strict crescătoare pe \mathbb{R} , ecuația (*) are soluția unică

$t = -1$.

Deci $x=2$ soluție unică. (3p)

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 4.

Să se determine funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ care verifică simultan condițiile :

a) $f(x) \leq 5^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $f(x+y) \leq f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Soluție :

Logaritmăm în baza 5 ambele relații și obținem :

$$\log_5(f(x)) \leq x \quad \text{și} \quad \log_5(f(x+y)) \leq \log_5(f(x)) + \log_5(f(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Notând $g(x) = \log_5(f(x))$ avem $g(x) \leq x$ (1) și $g(x+y) \leq g(x) + g(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (2)

Din (1) rezultă $g(0) \leq 0$ și din (2) pentru $x=y=0$ rezultă $g(0) \geq 0$, deci $g(0) = 0$ (2p)

Din (2) pentru $y = -x$ avem $0 = g(0) \leq g(x) + g(-x)$, adică $g(x) \geq -g(-x)$ (2p)

Din (1) $g(-x) \leq -x$, adică $-g(-x) \geq x$, deci $g(x) \geq x$(2p)

În concluzie $g(x) = x$, adică $f(x) = 5^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (1p)

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 1.

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^*)$, $n \in \mathbb{N}$ impar

Dacă $A \cdot A^t = I_n$, arătați că $\det(A^2 - I_n) = 0$, unde A^t este transpusa matricei A

Soluție:

$$\det(A^2 - I_n) = \det(A^2 - A \cdot A^t) = \det(A) \cdot \det(A - A^t) \quad (1) \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Dar } \det(A - A^t) = \det(A - A^t)^t = \det(A^t - A) = (-1)^n \det(A - A^t) = -\det(A - A^t)$$

$$\Rightarrow \det(A - A^t) = 0 \dots\dots\dots 3p$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \det(A^2 - I_n) = 0 \dots\dots\dots 1p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 2.

Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 \in (0,1)$ și $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$ pentru $n \geq 1$. Să se calculeze:

$$a.) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad b.) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Gazeta matematică

Soluție:

a.) Se arată că $a_n \in (0,1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Deoarece $a_{n+1} - a_n = 2^{a_n} - 1 - a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător.

deci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent 2p

$$\text{Fie } l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Trecând la limită în relația de recurență, obținem că $l = 2^l - 1 \Rightarrow l = 0$ sau $l = 1$

Cum șirul este descrescător, $l = 0$2p

b.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{a_n} - 1}{a_n} = \ln 2$$

.....3p

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 3.

Determinați toate mulțimile $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$ cu proprietățile:

- i.) $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nesingulare;
- ii.) $\forall X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow XY \in \mathcal{A}$.

Soluție:

Fie $X \in \mathcal{A}$, $X \neq I_2 \Rightarrow X^n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}$ a.î. $X^p = X^q$

$$\Rightarrow X^{p-q} = I_2 \Rightarrow I_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow X, I_2 \in \mathcal{A} \dots\dots\dots 2p$$

- 1) Dacă $X^2 = I_2$, fie $\mathcal{A} = \{I_2, X, Y\} = \{I_2, X, Y^2, XY\} = \{X, I_2, XY\}$
Deci, $XY = Y \Rightarrow Y = I_2$, contradicție 1p
- 2) Dacă $X^2 \neq I_2$ cum $X^2 \neq X \Rightarrow X^3 = I_2$ deci, $\mathcal{A} = \{I_2, X, X^2\}$ 1p

Determinăm toate matricele X cu $X^3 = I_2$

$$\det(X) = 1; X^2 - \text{Tr}(X) \cdot X + I_2 = 0_2 \Rightarrow X^2 = \text{Tr}(X) \cdot X - I_2 \Rightarrow$$

$$X^3 = \text{Tr}(X) \cdot X^2 - X \Rightarrow I_2 = \text{Tr}(X)(\text{Tr}(X)X - I_2) - X \Rightarrow (\text{Tr}(x)^2 - 1)X = (\text{Tr}(X) + 1) I_2$$

$$\text{Dacă } \text{Tr}(X) = -1 \Rightarrow X^2 + X + I_2 = 0_2$$

$$\text{Fie } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + d = -1 \\ ad - bc = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{există o infinitate de matrice } X \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Dacă } \text{Tr}(X) \neq -1 \Rightarrow (\text{Tr}(X) - 1)X = I_2 \Rightarrow X = \frac{1}{\text{Tr}(X) - 1} \cdot I_2 \text{ și}$$

$$\det(x) = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\text{Tr}(X) - 1}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{Tr}(x) = 2 \text{ sau } \text{Tr}(x) = 0 \text{ caz care nu convine} \dots\dots\dots 1p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 4.

Fie $f, g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții monotone. Să se arate că există $c \in (0,1]$ astfel încât:

$$f(c) + g(c) \neq \sin \frac{1}{c}$$

Procedăm prin reducere la absurd

Presupunem

$$f(x) + g(x) = \sin \frac{1}{x} \quad \forall x \in (0,1] \quad \dots\dots\dots 2p$$

Fie șirul

$$(x_n)_{n \geq 1} \text{ cu } x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} \quad n \geq 1 \Rightarrow \sin \frac{1}{x_n} = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ $y_n = (-1)^n$ nu este convergent (1) 2p

Fie șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$, unde $a_n = f(x_n)$ și $b_n = g(x_n) \quad \forall n \geq 1$ sunt monotone și mărginite, deci convergente. 2p

Așadar $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$, este convergent contradicție cu (1). 1p

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 1.

Să se calculeze $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{\cos x} \cdot dx$

Soluție:

$$\varphi(x) = 2\pi - x; \quad \varphi^{-1}(x) = 2\pi - x;$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{\cos x} \cdot dx = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{2\pi - x}{\cos x} (-1) \cdot dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{2\pi - x}{\cos x} \cdot dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{2\pi}{\cos x} \cdot dx - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{\cos x} \cdot dx \dots \dots 3p$$

$$\Rightarrow I = \pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} \cdot dx = \pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} \cdot dx = -\pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t^2 - 1} \cdot dt =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\pi}{2} \ln \left| \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}+1} \right| =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right| = -\frac{\pi}{2} \ln(\sqrt{2}+1)^2 = -\pi \ln(\sqrt{2}+1) \dots \dots \dots 4p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 2.

Pentru $m, n \in \mathbb{N}^*$ notăm $I_{m,n} = \int_0^1 x^m \operatorname{tg}^n x dx$. Să se calculeze $\lim_{m \rightarrow \infty} I_{m,2020}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{1,n}$.

Soluție (barem de corectare)

Funcția tangentă este crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă că $0 \leq \operatorname{tg} x \leq \operatorname{tg} 1 \quad \forall x \in [0, 1]$,

deci $0 \leq \operatorname{tg}^{2020} x \leq (\operatorname{tg} 1)^{2020} \quad \forall x \in [0, 1]$ 1p

Atunci

$0 \leq I_{m,2020} = \int_0^1 x^m \operatorname{tg}^{2020} x dx \leq (\operatorname{tg} 1)^{2020} \int_0^1 x^m dx = \frac{(\operatorname{tg} 1)^{2020}}{m+1} \rightarrow 0, \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} I_{m,2020} = 0$ 2p

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\frac{\pi}{4} < \alpha < 1$ 1p

$I_{1,n} = \int_0^1 x \operatorname{tg}^n x dx \geq \int_\alpha^1 x \operatorname{tg}^n x dx \geq \alpha \int_\alpha^1 \operatorname{tg}^n x dx \geq \alpha \int_\alpha^1 \operatorname{tg}^n \alpha dx \geq \alpha = \alpha(1 - \alpha) \dots \dots \dots$ 2p

Cum $\operatorname{tg} \alpha > 1$ și $1 - \alpha > 0$ avem $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{1,n} = \infty$ 1p

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 3.

Considerăm H_1, H_2, H_3 subgrupuri ale lui (\mathbb{C}^*, \cdot) avînd m, n respectiv p elemente, unde $(m, n) = 1$, $(n, p) = 1$ și $(m, p) = 1$. Să se determine numărul elementelor mulțimii $H_1 \cup H_2 \cup H_3$.

Soluție:

H subgrup cu n elemente a lui (\mathbb{C}^*, \cdot)

$$H = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \Rightarrow H = \{xx_1, xx_2, \dots, xx_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ pentru } \forall x \in H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (xx_1)(xx_2) \dots (xx_n) = x_1x_2 \dots x_n \Rightarrow x^n = 1 \Rightarrow H = U_n \dots \dots \dots 2p$$

Dacă $(m, n) = 1$ și x_0 rădăcină comună a ecuațiilor

$$x^m = 1 \text{ și } x^n = 1 \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z} \text{ și } 1 = km + ln \Rightarrow$$

$$x_0 = x_0^{km+ln} = (x_0^m)^k \cdot (x_0^n)^l = 1 \dots \dots \dots 3p$$

Dacă notăm $n(A)$ numărul de elemente ale mulțimii $A \Rightarrow$

$$n(H_1 \cup H_2 \cup H_3) =$$

$$= n(H_1) + n(H_2) + n(H_3) - n(H_1 \cap H_2) - n(H_1 \cap H_3) - n(H_2 \cap H_3) + n(H_1 \cap H_2 \cap H_3)$$

$$= m + n + p - 2 \dots \dots \dots 2p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 4.

Fie A un inel și $a, b \in A$ cu proprietatea că $a^2 + b^2 = ab$. Să se arate că $(ab)^2 = b^2a^2$ și $(ba)^2 = a^2b^2$.

Soluție (barem de corectare)

Din ipoteză obținem: $a(a^2 + b^2) = a^2b, (a^2 + b^2)b = ab^2$ și prin adunarea celor două avem

$$a^3 + b^3 = 0 \quad (1) \dots\dots\dots 2p$$

Din $a^2(a^2 + b^2) = a^3b$ și din (1) obținem $a^2b^2 = -a^4 - b^4, (2) \dots\dots\dots 1p$

$$b(a^2 + b^2)a = baba \Rightarrow ba^3 + b^3a = (ba)^2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} (ba)^2 = -a^4 - b^4 \dots\dots\dots 1p$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} (ba)^2 = a^2b^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$(ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4 + a^2b^2 + b^2a^2 \stackrel{(2)}{=} a^4 + b^4 - a^4 - b^4 + b^2a^2 = b^2a^2 \dots\dots\dots 2p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;