OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 1.

$$Să\ se\ calculeze\ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{\cos x}\cdot dx$$

Soluție:

$$\varphi(x) = 2\pi - x; \quad \varphi^{-1}(x) = 2\pi - x;$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{\cos x}\cdot dx = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{2\pi - x}{cos\ x}(-1)\cdot dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{2\pi - x}{cos\ x}\cdot dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{2\pi}{cos\ x}\cdot dx - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{cos\ x}\cdot dx \ldots\ldots 3p$$

$$\Rightarrow I = \pi\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{cos\ x}\cdot dx = \pi\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - sin^2 x}\cdot dx = -\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t^2 - 1}\cdot dt =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\pi}{2}\ln\left|\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}\right| =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right| = -\frac{\pi}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = -\pi\ln\left(\sqrt{2}+1\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4p$$

Notă:

---

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 2.

Pentru $m,n \in N^*$ notăm $I_{m,n} = \int_0^1 x^m tg^n x dx$. Să se calculeze $\lim_{m\to\infty} I_{m,2020}$ și $\lim_{n\to\infty} I_{1,n}$.

Soluție (barem de corectare)

Funcția tangentă este crescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ rezultă că $0 \le tgx \le tg1 \quad \forall x \in [0,1]$,

deci $0 \le tg^{2020}x \le (tg1)^{2020} \quad \forall x \in [0,1]$ 1p

Atunci

$$0 \le I_{m,2020} = \int_0^1 x^m tg^{2020} x dx \le (tg1)^{2020} \int_0^1 x^m dx = \frac{(tg1)^{2020}}{m+1} \to 0, \Rightarrow \lim_{m\to\infty} I_{m,2020} = 0$$ 2p

Fie $\alpha \in R$ astfel încât $\frac{\pi}{4} < \alpha < 1$ 1p

$$I_{1,n} = \int_0^1 x tg^n x dx \ge \int_\alpha^1 x tg^n x dx \ge \alpha \int_\alpha^1 tg^n x dx \ge \alpha \int_\alpha^1 tg^n \alpha dx \ge \alpha = \alpha(1-\alpha)$$ 2p

Cum $tg\alpha > 1$ și $1-\alpha > 0$ avem $\lim_{n\to\infty} I_{1,n} = \infty$ 1p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 3.

Considerăm H_1, H_2, H_3 subgrupuri ale lui $(\mathbb{C}^*, \ \cdot)$ avînd *m*, *n* respectiv *p* elemente, unde *(m,n) = 1*, *(n,p) = 1* și *(m,p) = 1*. Să se determine numărul elementelor mulțimii $H_1 \ \cup \ H_2 \ \cup \ H_3$.

Soluție:

H subgrup cu *n* elemente a lui $(\mathbb{C}^*, \ \cdot)$

$H = \{x_1, x_2, \dots, \ x_n\} \ \Rightarrow H = \{xx_1, x\,x_2, \dots, \ xx_n\} = \{x_1, x_2, \dots, \ x_n\} \ pentru \ \forall \, x \ \in H \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ (xx_1)(xx_2)\dots(xx_n) = x_1x_2\dots x_n \ \Rightarrow \ x^n = 1 \ \Rightarrow \ H = U_n \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots..2p$

$Dacă \ (m, n) = 1 \ și \ x_0 \ rădăcină \ comună \ a \ ecuațiilor$

$x^m = 1 \ și \ x^n = 1 \ \Rightarrow \ \exists \, k, l \ \in \ \mathbb{Z} \ și \ \ 1 = km + \ln \Rightarrow$

$x_0 = \ x_0^{km+ln} = \ (x_0^m)^k \cdot (x_0^n)^l = 1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.3p$

Dacă notăm *n(A)* numărul de elemente ale mulțimii *A*$\Longrightarrow$

$n(H_1 \cup H_2 \cup H_3) =$

$= n(H_1) + \ n(H_2) + \ n(H_3) - n(H_1 \cap H_2) - n(H_1 \cap H_3) - n(H_2 \cap H_3) + n(H_1 \cap H_2 \cap H_3)$

$= m + n + p - 2 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 2p$

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 4.

Fie A un inel și $a, b \in A$ cu proprietatea că $a^2+b^2=ab$. Să se arate că $(ab)^2=b^2a^2$ și $(ba)^2=a^2b^2$.

Soluție (barem de corectare)

Din ipoteză obținem: $a\left(a^2+b^2\right)=a^2b, \left(a^2+b^2\right)b=ab^2$ și prin adunarea celor două avem

$a^3+b^3=0 \quad (1)$ ……………………………………………………………………………..2p

Din $a^2\left(a^2+b^2\right)=a^3b$ și din (1) obținem $a^2b^2=-a^4-b^4, (2)$ ……………………..1p

$b\left(a^2+b^2\right)a=baba \Rightarrow ba^3+b^3a=(ba)^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} (ba)^2=-a^4-b^4$ ……………………..1p

$\overset{(2)}{\Rightarrow} (ba)^2=a^2b^2$ ……………………………………………………………………………..1p

$(ab)^2=\left(a^2+b^2\right)^2=a^4+b^4+a^2b^2+b^2a^2 \overset{(2)}{=} a^4+b^4-a^4-b^4+b^2a^2=b^2a^2$ ………2p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*