OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 1.

$Fie\ A \in\ \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^*), n \in\ \mathbb{N}\ impar$

$Dacă\ A \cdot A^t\ = I_n, arătați\ că\ det(A^2 - I_n) = 0, unde\ A^t\ este\ transpusa\ maticei\ A$

Soluție:

$det(A^2 - I_n) =\ det(A^2 - A \cdot A^t) = det(A) \cdot det(A - A^t)\quad (1)$ 3p

$Dar\ det(A - A^t) = det(A - A^t)^t = det(A^t - A) =\ (-1)^n det(A - A^t) = -det(A - A^t)$

$\Longrightarrow det(A - A^t) = 0$ 3p

$\overset{(1)}{\Rightarrow} det(A^2 - I_n) = 0$ 1p

Notă:

---

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 2.

Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ $cu\ a_1 \in (0,1)$ $și$ $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$ $pentru\ n \geq 1$. Să se calculeze:

$$a.)\ \lim_{n\to\infty} a_n \qquad b.)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Gazeta matematică

Soluție:

a.) Se arată că $a_n \in (0,1),\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

Deoarece $a_{n+1} - a_n = 2^{a_n} - 1 - a_n < 0, \forall\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow șirul\ (a_n)_{n\geq 1}\ este\ strict\ descrescător.$

$deci\ șirul\ (a_n)_{n\geq 1}\ este\ convergent$ 2p

$Fie\ l = \lim_{n\to\infty} a_n$

Trecând la limită în relația de recurență, obținem că $l = 2^l - 1 \quad \Rightarrow l = 0\ \ sau\ l = 1$

Cum șirul este descrescător, *l = 0.* *2p*

b.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{a_n} - 1}{a_n} = \ln 2$$

....3p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 3.

Determinați toate mulțimle $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$ cu proprietățile:

i.) $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *nesingulare*;
ii.) $\forall X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow XY \in \mathcal{A}$.

Soluție:

$Fie\ X \in \mathcal{A}, \quad X \neq I_2 \Rightarrow X^n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists\, p, q \in \mathbb{N}\ a.î.\ X^p = X^q$

$\Rightarrow X^{p-q} = I_2 \Rightarrow I_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow X, I_2 \in \mathcal{A}$ ………………………………………………… 2p

1) $Dacă\ X^2 = I_2,\ fie\ \mathcal{A} = \{I_2, X, Y\} = \{I_2, X, Y^2, XY\} = \{X, I_2, XY\}$
   $Deci, XY = Y \Rightarrow Y = I_2, contradicție$ ……………………………………………….. 1p
2) $Dacă\ X^2 \neq I_2\ cum\ X^2 \neq X \Rightarrow X^3 = I_2\ deci, \mathcal{A} = \{I_2, X, X^2\}$ …………………….. 1p

Determinăm toate matricele X cu $X^3 = I_2$

$\det(X) = 1;\ X^2 - Tr(X) \cdot X + I_2 = 0_2 \Rightarrow X^2 = Tr(X) \cdot X - I_2 \Rightarrow$

$X^3 = Tr(X) \cdot X^2 - X \Rightarrow I_2 = Tr(X)(Tr(X)X - I_2) - X \Rightarrow (Tr(x)^2 - 1)X = (Tr(X) + 1)\, I_2$

$Dacă\ Tr(X) = -1 \Rightarrow X^2 + X + I_2 = 0_2$

Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + d = -1 \\ ad - bc = 1 \end{cases} \Rightarrow$ *există o infinitate de matrice X* ………………… 2p

$Dacă\ Tr(X) \neq -1 \Rightarrow (Tr(X) - 1)X = I_2 \Rightarrow X = \dfrac{1}{Tr(X) - 1} \cdot I_2\ și$

$\det(x) = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{Tr(X) - 1}\right)^2 = 1 \Rightarrow Tr(x) = 2\ sau\ Tr(x) = 0\ caz\ care\ nu\ convine$ ……… 1p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 4.

Fie $f, g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții monotone. Să se arate că există $c \in (0,1]$ astfel încât:

$$f(c) + g(c) \neq \sin\frac{1}{c}$$

Procedăm prin reducere la absurd

Presupunem
$f(x) + g(x) = \sin\frac{1}{x} \ \forall x \in (0,1]$ ……………………………………………………2p

Fie șirul
$(x_n)_{n\geq 1}\, cu\; x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}\; n \geq 1 \Rightarrow \sin\dfrac{1}{x_n} = (-1)^n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ $y_n = (-1)^n$ nu este convergent (1) 2p

Fie șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ $și$ $(b_n)_{n\geq 1}$ $, unde$ $a_n = f(x_n)$ $și$ $b_n = g(x_n)$ $\forall n \geq 1$ sunt monotone și mărginite, deci convergente. 2p

Așadar $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$, este convergent contradicție cu (1). 1p

Notă:

---

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*