OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 1.

Fie numerele complexe $z_1, z_2, ..., z_{2020}$, fiecare având modulul egal cu 1 și $z_1 + z_2 + ... + z_{2020} = 0$. Să se arate că $\sum_{k=1}^{2020} |z - z_k| \geq 2020 \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Soluție:

Din $z_1 + z_2 + ... + z_{2020} = 0$ rezultă $\overline{z_1} + \overline{z_2} + ... + \overline{z_{2020}} = 0$, deci $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + ... + \frac{1}{z_{2020}} = 0$ (2p)

$$\sum_{k=1}^{2020} |z - z_k| = \sum_{k=1}^{2020} |z_k| \cdot \left|\frac{z}{z_k} - 1\right| = \sum_{k=1}^{2020} \left|\frac{z}{z_k} - 1\right| \quad \text{(2p)}$$

Folosind inegalitatea triunghiului avem $\sum_{k=1}^{2020} \left|\frac{z}{z_k} - 1\right| \geq \left|\sum_{k=1}^{2020} z\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + ... + \frac{1}{z_{20201}}\right) - 2020\right| = 2020$ (3p)

Notă:

---

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 2.

Determinați $x, y \in (0, +\infty)$ astfel încât

$$\lg^2\left(\frac{x}{y}\right) = 3\lg\left(\frac{x}{2020}\right)\cdot\ \lg\left(\frac{2020}{y}\right)$$

Soluție:

Notăm *lg x – lg 2020 =a* și *lg y – lg 2020 =b*

Avem $\lg\left(\frac{x}{y}\right) = \lg x - \lg y = a - b$. (1p)

Ecuația devine $(a - b)^2 = -3ab$, adică $a^2 + ab + b^2 = 0$. (3p)

$dacă\ b \neq 0\ atunci\ avem\ ecuația\ \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0, nu\ are\ soluții\ reale$

$deci\ b = 0$

Soluția unică a acestei ecuații omogene este $a = b = 0$. (2p)

Deci x = y = 2020 . (1p)

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 3.

Rezolvați ecuația $\sqrt[5]{4x-5}+\sqrt[5]{x-2}=\sqrt[5]{2x-1}$ în $\mathbb{R}$

Soluție:

Observăm că x=2 este soluție. (1p)

Deoarece $x=\frac{1}{2}$ nu este soluție, putem împărți ecuația prin $\sqrt[5]{2x-1}$.

Obținem $\sqrt[5]{\frac{4x-5}{2x-1}}+\sqrt[5]{\frac{x-2}{2x-1}}=1$. (1p)

Deoarece $\frac{4x-5}{2x-1}=2-\frac{3}{2x-1}$ și $\frac{x-2}{2x-1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2x-1}\right)$ putem nota $-\frac{3}{2x-1}=t$ (2p)

Ecuația devine $\sqrt[5]{2+t}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}(1+t)}=1$ (*).

Deoarece funcția $f(t)=\sqrt[5]{2+t}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}(1+t)}$ este strict crescătoare pe R , ecuația (*) are soluția unică

t = -1.

Deci x=2 soluție unică. (3p)

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 4.

Să se determine funcția $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ care verifică simultan condițiile :

a) $f(x) \leq 5^x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

b) $f(x+y) \leq f(x) \cdot f(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

Soluție :

Logaritmăm în baza 5 ambele relații și obținem :

$\log_5(f(x)) \leq x$ și $\log_5(f(x+y)) \leq \log_5(f(x)) + \log_5(f(y))\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

Notând g(x)= $\log_5(f(x))$ avem $g(x) \leq x$ (1) și $g(x+y) \leq g(x) + g(y)\ \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ (2)

Din (1) rezultă $g(0) \leq 0$ și din (2) pentru x=y=0 rezultă $g(0) \geq 0$, deci g(0) = 0 ....(2p)

Din (2) pentru y = - x avem $0=g(0) \leq g(x)+g(-x)$, adică $g(x) \geq -g(-x)$ ....(2p)

Din (1) $g(-x) \leq -x$, adică $-g(-x) \geq x$, deci $g(x) \geq x$. ....(2p)

În concluzie g(x)=x, adică $f(x) = 5^x\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ ....(1p)

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*