PROBLEMA 1.

Fie numerele complexe  , fiecare având modulul egal cu 1 și . Să se arate că  $∀$ *z* ϵ $C$ .

**Soluție:**

Din  rezultă , deci  (2p)

 (2p)

Folosind inegalitatea triunghiului avem  (3p)

PROBLEMA 2.

Determinați *x*, *y* ϵ (0, +$\infty $) astfel încât
$$lg^{2}\left(\frac{x}{y}\right)=3 lg\left(\frac{x}{2020}\right)∙ lg\left(\frac{2020}{y}\right)$$

**Soluție:**

Notăm *lg x* – *lg 2020* =*a* și *lg y* – *lg 2020* =*b*

Avem  . (1p)

Ecuația devine (a - b)2 = -3ab , adică a2 + ab + b2 = 0 . (3p)

$$dacă b\ne 0 atunci avem ecuația \left(\frac{a}{b}\right)^{2}+\left(\frac{a}{b}\right)+1=0, nu are soluții reale$$

$$deci b=0 $$

Soluția unică a acestei ecuații omogene este *a = b =* 0. (2p)

Deci x = y = 2020 . (1p)

PROBLEMA 3.

Rezolvați ecuația  în $R$

**Soluție:**

Observăm că x=2 este soluție. (1p)

Deoarece  nu este soluție, putem împărți ecuația prin  .

Obținem  . (1p)

Deoarece  și  putem nota  (2p)

Ecuația devine  (\*).

Deoarece funcția  este strict crescătoare pe R , ecuația (\*) are soluția unică

t = -1.

Deci x=2 soluție unică. (3p)

PROBLEMA 4.

Să se determine funcția  *f* : $R$ → (0, +$\infty $) care verifică simultan condițiile :

**a)**  $∀$ *x* ϵ $R$

**b)**  $∀$ *x, y* ϵ $R$

**Soluție :**

Logaritmăm în baza 5 ambele relații și obținem :

 și  $∀$ *x, y* ϵ $R$

Notând g(x)=  avem  (1) și  $∀$ *x, y* ϵ $R$ (2)

Din (1) rezultă g(0) ≤ 0 și din (2) pentru x=y=0 rezultă g(0) $\geq $ 0 , deci g(0) = 0 ................(2p)

Din (2) pentru y = - x avem 0=g(0) ≤ g(x)+g(-x), adică g(x) ≥ - g(-x) .................................(2p)

Din (1) g(-x) ≤ - x, adică -g(-x) ≥ x, deci g(x)≥x. .................................................................(2p)

În concluzie g(x)=x, adică  $∀$ *x* ϵ $R$ .......................................................................(1p)