OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 1.

Să se determine funcțiile $f: N^* \to R$ cu proprietatea :

$$f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + \ldots + n \cdot f(n) = f(n+1) - 1, \forall\, n \in N^*$$

Soluție.

Pentru n=1 relația devine $f(2) = 1 + f(1)$. (1 punct)

Pentru n=2 relația devine $f(1) + 2f(2) = f(3) - 1 \Leftrightarrow f(3) = 3\big(1 + f(1)\big)$. (1 punct)

Pentru n=3 relația dată conduce la $f(4) = 12 \cdot \big(1 + f(1)\big)$. (1 punct)

Prin inducție se arată că $f(n) = \frac{n!}{2}\big(1 + f(1)\big)$, pentru orice $n \geq 2$. (unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$)

(3 puncte)

Notând f(1)=a, unde a este un număr real, rezultă că funcțiile căutate sunt:

$$f: N^* \to R, f(n) = \begin{cases} a, & n = 1 \\ \frac{n!(a+1)}{2}, & n \geq 2 \end{cases}.$$ (1 punct)

Notă:

---

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 2.

Să se rezolve în ℝ ecuația:

$$\sqrt{x^2+31x}+\sqrt{x+31}=x+\sqrt{x}+8$$

Soluție:

$$\sqrt{x(x+31)}+\sqrt{x+31}=\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)+8$$

$$\sqrt{x+31}\,(\sqrt{x}+1)=\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)+8$$

$$(\sqrt{x}+1)\left(\sqrt{x+31}-\sqrt{x}\right)=8$$ 2p

$notăm \quad a=\sqrt{x+31}$ și $b=\sqrt{x}$

$$\begin{cases}(b+1)(a-b)=8\\ a^2-b^2=31\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(b+1)(a-b)=8\\ (a-b)(a+b)=31\end{cases}$$ 2p

$$dar\quad a\neq b\Rightarrow\frac{b+1}{a+b}=\frac{8}{31}\Leftrightarrow a=\frac{23b+31}{8}\Rightarrow 15b^2+46b-33=0$$ 2p

$$b_1=-\frac{11}{3},\qquad b_2=\frac{3}{5}\quad\Longrightarrow x=\frac{9}{25}$$ 1p

Notă:

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 3.

Fie rombul *ABCD* și punctele $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CD)$. Să se arate că centrul de greutate al triunghiului *MNP* aparține dreptei *AC* dacă și numai dacă *AM* + *DP* = *BN*.

Soluție:

Fie *R* mijlocul lui $[NP]$ $iar\ MR \cap AC = \{G\}$

$$Considerăm\ \frac{MG}{GR} = k, AB = a, \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .1p$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AM} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AR} = \frac{1}{1+k}\frac{AM}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}\right)$$

$$= \frac{1}{1+k}\frac{AM}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{2(1+k)}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\right) + \frac{k}{2(1+k)}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}\right)$$

$$= \frac{AM}{(1+k)a}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{2(1+k)}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{2(1+k)}\frac{BN}{a}\overrightarrow{BC} + \frac{k}{2(1+k)}\overrightarrow{AD} + \frac{k}{2(1+k)}\frac{DP}{a}\overrightarrow{DC}$$

$$= \left(\frac{AM}{(1+k)a} + \frac{k}{2(1+k)} + \frac{kDP}{2a(1+k)}\right)\cdot\overrightarrow{AB} + \left(\frac{kBN}{2a(1+k)} + \frac{k}{2(1+k)}\right)\cdot\overrightarrow{AD} \dots\dots\dots .2p$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}\ \ coliniari \Leftrightarrow \frac{AM}{(1+k)a} + \frac{k}{2(1+k)} + \frac{kDP}{2a(1+k)} = \frac{kBN}{2a(1+k)} + \frac{k}{2(1+k)}$$

$$\frac{AM}{(1+k)a} + \frac{kDP}{2a(1+k)} = \frac{kBN}{2a(1+k)}$$

$$AM + \frac{k}{2}DP = \frac{k}{2}BN \quad (*) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .3p$$

$$G\ centru\ de\ greutate \Leftrightarrow k = 2 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} AM + DP = BN \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .1p$$

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 4.

1. Se dau numerele $x, y, z > 0$ pentru care $x + y + z = 2$.
   a) Să se demonstreze că $\frac{x-y}{xy+2z} + \frac{y-z}{yz+2x} + \frac{z-x}{zx+2y} = 0$.
   b) Să se demonstreze că $\frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} \geq \frac{9}{8}$.

Barem

a)

$\frac{x-y}{xy+2z} + \frac{y-z}{yz+2x} + \frac{z-x}{zx+3y} = \frac{x-y}{xy+(x+y+z)z} + \frac{y-z}{yz+(x+y+z)x} + \frac{z-x}{zx+(x+y+z)y} = \frac{x-y}{(x+z)(y+z)} + \frac{y-z}{(x+y)(x+z)} + \frac{z-x}{(x+y)(y+z)} = \frac{x^2-y^2+y^2-z^2+z^2-x^2}{(x+y)(x+z)(y+z)} = 0$. **3p**

b) $\frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} = \frac{y}{xy+2z} + \frac{z}{yz+2x} + \frac{x}{zx+2y} \Longrightarrow \frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} = \frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{(x+z)(y+z)} + \frac{y+z}{(x+y)(x+z)} + \frac{z+x}{(x+y)(y+z)}\right)$ (1)..**1p**

Notăm. $x + y = a, y + z = b, z + x = c$, $a, b, c > 0$

$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{ab+ac+bc}{abc} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ (2)............................**1p**

$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \frac{3}{a+b+c} \Longrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{4}$ (3)............................**1p**

$\xRightarrow{(1),(2),(3)} \frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} \geq \frac{9}{8}$ **1p**

Notă:

---

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*