OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

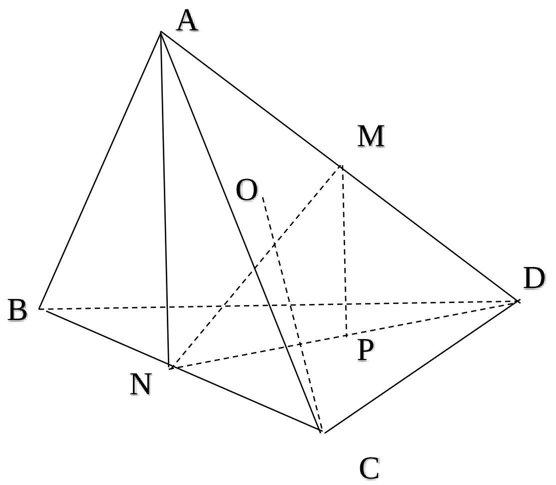
BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII –a

PROBLEMA 1.

Fie tetraedrul regulat *ABCD* cu lungimea muchiei de 10 cm. Fie *M* mijlocul muchiei [*AD*], *N* mijlocul muchiei [*BC*] și *P* mijlocul segmentului [*DN*]. Determinați:

a.) Poziția dreptei *MP* față de planul (*ABC*);
b.) Măsura unghiului format de dreptele *MN* și *BC*;
c.) Distanța de la punctul *C* la planul (*ABD*).

Soluție:



a.) MP linie mijlocie în $\Delta\, ADN \Longrightarrow MP \parallel AN \Longrightarrow NP \parallel (ABC)$ 2p

b.) $\Delta\, BCD$ $\mathit{echilateral}$ și DN mediană $\Longrightarrow DN$ înălțime $\Longrightarrow BC \perp DN$

analog $BC \perp AN, deci\ BC \perp (AND)$

$MN \subset (AND) \Rightarrow BC \perp MN \Rightarrow m\left(\widehat{BC, MN}\right) = 90^0$ 2p

c.) Fie $CO \perp (ABD), O \in (ABD)$, $\Delta\, ABD\ echilateral \Longrightarrow OA = OB = OD = \frac{10\sqrt{3}}{3}\ cm$

$Folosind\ teorema\ lui\ Pitagora$ în $\Delta\, AOC$ obț$inem\ CO = \dfrac{10\sqrt{6}}{3}\ cm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..3p$

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII –a

PROBLEMA 2.

Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația:

$$7x^2 + 8x + 1 = 4^{2x}$$

Soluție:

$Pentru\ x < 0 \Rightarrow 4^{2x} \notin \mathbb{Z}$ 1p

$Fie\ x \geq 0$

Ecuația se scrie:

$(7x + 1)(x + 1) = 2^{4x}$ 1p

$\Rightarrow x + 1 = 2^m$

$\Rightarrow 7x + 1 = 2^n; cu\ n \geq m$ 2p

$\Rightarrow \dfrac{7x + 1}{x + 1} = 2^{n-m} \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x + 1 \mid 6; dar\ \ x + 1 = 2^m \Rightarrow x + 1 \in \{1; 2\}$ 2p

$Pentru\ x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$

$Pentru\ x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1$. Ambele sunt soluții. 1p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII –a

PROBLEMA 3.

Se dau numerele reale x, y, $z > 0$, diferite de 3. Dacă $x + y + z = 3$ arătați că:

$$F(x,y,z) = \frac{x-y}{xy+3z} + \frac{y-z}{yz+3x} + \frac{z-x}{zx+3y}$$

este constantă.

G.M. nr. 12/2019

Soluție:

Înlocuim $z = 3 - x - y$ în prima fracție, obținem:

$$\frac{x-y}{xy+3(3-x-y)} = \frac{x-y}{xy-3x-3y+9} = \frac{x-y}{(x-3)(y-3)}$$

Analog

$$\frac{y-z}{yz+3x} = \frac{y-z}{(y-3)(z-3)}$$

$$\frac{z-x}{zx+3y} = \frac{z-x}{(z-3)(x-3)} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.4p$$

Ca urmare:

$$F(x,y,z) = \frac{(x-y)(z-3)+(y-z)(x-3)+(z-x)(y-3)}{(x-3)(y-3)(z-3)}$$

$$\Rightarrow F(x,y,z) = 0 \quad \forall x,y,z \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..3p$$

Notă:

---

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII –a

PROBLEMA 4.

În fiecare din vârfurile unui cub se pune câte un singur fruct. Frucrul poate fi banană, portocală sau măr. Prin „platou” se înțelege orice plan care conține 4 dintre vârfurile cubului. Stabiliți dacă există o așezare a fructelor astfel încât fiecare platou să conțină toate cele 3 tipuri de fructe. Justificați răspunsul.

Soluție:

Notăm cubul $ABCDA'B'C'D'$.

Considerăm că în A și B avem fructe de același fel, de exemplu banane.

Rezultă că în C și D avem măr și portocală sau invers. Analog în A' și B', deci planul $(CDA'B')$ nu conține banane.

Rezultă că nu se poate ca pe o muchie să avem două fructe de același fel. 4p

Analizăm cazul în care în A și B sunt fructe diferite, de exemplu măr în A și banană în B.

Fiecare din planele $(ABCD)$, $(ABB'A')$ și $(ABC'D')$ va conține o singură portocală. Deci în 3 dintre vârfurile C, D, A', B', C', D' vor fi portocale, iar în celelalte 3 vor fi două mere și o banană, sau două banane și un măr.

Dacă sunt două mere și o banană atunci vor exista două muchii paralele care nu conțin banană, deci imposibil.

Dacă sunt două banane și un măr atunci există două muchii paralele care conțin măr.

Deci nu este posibil ca toate platourile să conțină toate tipurile de fructe. 3p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*