PROBLEMA 1.

Punctul *D* este în interiorul triunghiului *ABC*, astfel încât unghiurile *BAC* și *BDC* sunt suplementare, (*BE* este bisectoarea $∢ ABD$ și (*CE* este bisectoarea $∢ ACD$.

Aflați $m\left(∢BEC\right)$.

Soluție:

$$m\left(∢ABE\right)=m\left(∢DBE\right)=a$$

$$m\left(∢ACE\right)=m\left(∢DCE\right)=b$$

$$m\left(∢DBC\right)=x; m\left(∢DCB\right)=y$$

$⟹x+y=m\left(∢A\right)$ ................................................................................................3p

$$2a+2b+2x+2y= 180^{0}$$

$⟹a+b+x+y= 90^{0}$ .......................................................................................3p

$⟹m\left(∢E\right)= 90^{0}$ ..................................................................................................1p

PROBLEMA 2.

Fie $a \in N , a\geq 2$ iar m și n divizori ai lui a cu m < n.

Arătați că $a∙\left(n-m\right) > m^{2} \left(1\right)$

Soluție :

|  |  |
| --- | --- |
| $a=m∙p și a=n∙q ⇒ p >q ⇒p-1 \geq q$  |  2p |
| $$\left(1\right) ⇔m∙p\left(n-m\right) >m^{2}$$$⇔ pn-pm >m$ $⇔pn >m \left(p+1\right)$ $$⇔ \frac{p}{p+1} > \frac{m}{n} \left(2\right) $$ | 2p |
| $$dar \frac{m}{n}= \frac{q}{p} ⇒ \left(2\right) ⇔ \frac{p}{p+1}> \frac{q}{p} $$$$dar p-1 \geq q ⇒ \frac{p-1}{p} \geq \frac{q}{p}$$ | 2p |
| $$dar \frac{p}{p+1}> \frac{p-1}{p} ⇒ \frac{p}{p+1} > \frac{q}{p} ⇒ \left(1\right)$$ | 1p |

PROBLEMA 3.

Se consideră paralelogramul *ABCD*, *E* simetricul lui *C* față de *B* și $BF ⊥ AC, F \in AC.$
$$Știind că DF ⊥FE calculați \frac{2DC+3DE}{5DC+DE}$$

Soluție:

D

C

F

A

B

O

E

|  |  |
| --- | --- |
| $$ABCD paralelogram; AB ∩DE= \left\{O\right\}$$ | 1p |
| $OF= \frac{AB}{2};OF= \frac{DE}{2} ⇒ AB=DE ⇒ABCD dreptunghi$  | 3p |
| $$⇒DB ⊥EC ⇒DCE isoscel ⇒DC=DE $$ | 2p |
| $$⇒raportul este \frac{5}{6}$$ | 1p |

PROBLEMA 4.

Fie numerele întregi $x\_{1},x\_{2}, …x\_{2022}$ astfel în cât $\left\{x\_{1};x\_{2}; …;x\_{2022} \right\}=\left\{1; 2; …,;2022\right\}$.

Arătați că printre numerele: $\left|x\_{1}-1\right|;\left|x\_{2}-2\right|;\left|x\_{3}-3\right|;…;\left|x\_{2022}-2022\right|$

există cel puțin două egale.

Soluție

Presupunem că numerele $\left|x\_{1}-1\right|;\left|x\_{2}-2\right|;\left|x\_{3}-3\right|;…;\left|x\_{2022}-2022\right|$ sunt diferite două câte două

$⟹$ mulțimea lor este $\left\{0;1; 2; …;2021\right\}$ ...................................................................... 2p

Fie $ S\_{1}=\left|x\_{1}-1\right|+\left|x\_{2}-2\right|+\left|x\_{3}-3\right|+…+\left|x\_{2022}-2022\right|=2021∙1011 număr impar$

și $S\_{2}= x\_{1}-1+x\_{2}-2+…+ x\_{2022}-2022=0 $ ........................................................ 2p

Dar $\left|x\_{i}-i\right| și x\_{i}-i$ au aceeași paritate

$⟹S\_{1} și S\_{2} au aceeași paritate ⟹contradicție$ ...................................................... 2p

$⟹\left|x\_{1}-1\right|;\left|x\_{2}-2\right|;\left|x\_{3}-3\right|;…;\left|x\_{2022}-2022\right|$ nu pot fi diferite două câte două. ........ 1p