

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

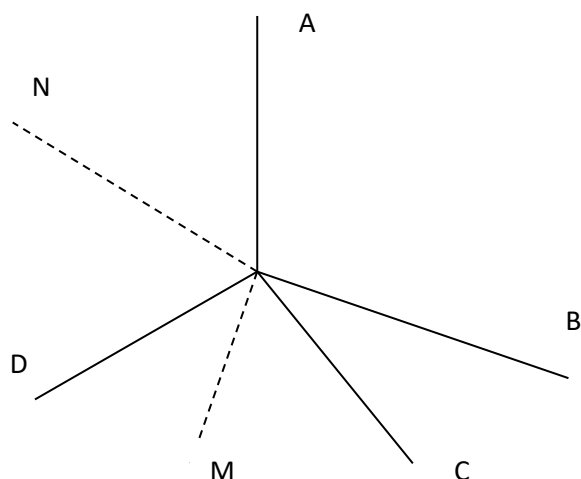
BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI –a

PROBLEMA 1.

În jurul punctului O se formează unghiurile BOC, COD, DOA și AOB.

Știind că măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor COD și DOA este de 95° , măsura unghiului COD este două treimi din măsura unghiului AOD și suplementul unghiului AOB este egal cu complementul unghiului BOC, să se afle măsurile unghiurilor COD, DOA, AOB și BOC.

Soluție (barem de corectare)



Desen.....1 p

Ducem [OM bisectoarea unghiului COD și [ON bisectoarea unghiului AOD.

$$m(\widehat{MON}) = 95^\circ \Leftrightarrow m(\widehat{MOD}) + m(\widehat{DON}) = 95^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m(\widehat{COD}) + m(\widehat{AOD}) = 190^\circ \Rightarrow m(\widehat{AOB}) +$$

$$+ m(\widehat{BOC}) = 170^\circ \dots\dots\dots 1 p$$

Notăm $m(\widehat{AOB}) = x^\circ$ și $m(\widehat{BOC}) = y^\circ$. Deci

$$x^\circ + y^\circ = 170^\circ \dots\dots\dots 1 p$$

Deoarece suplementul \widehat{AOB} este egal cu complementul \widehat{BOC} avem:

$$180^\circ - x^\circ = 90^\circ - y^\circ \Leftrightarrow 180^\circ = 90^\circ + x^\circ - y^\circ \Leftrightarrow 180^\circ - 90^\circ = x^\circ - y^\circ \Leftrightarrow x^\circ - y^\circ = 90^\circ \dots\dots\dots 1 p$$

Din $x^\circ + y^\circ = 170^\circ$ și $x^\circ - y^\circ = 90^\circ$ se află că $x^\circ = 130^\circ$ și $y^\circ = 40^\circ$. Deci $m(\widehat{AOB}) = 130^\circ$ și

$$m(\widehat{BOC}) = 40^\circ \dots\dots\dots 1 p$$

Pentru a afla $m(\widehat{COD})$ și $m(\widehat{AOD})$ ținem cont că $m(\widehat{COD}) + m(\widehat{AOD}) = 190^\circ$ și $m(\widehat{COD}) = \frac{2}{3}m(\widehat{AOD})$.

$$\text{Avem } \frac{2}{3}m(\widehat{AOD}) + m(\widehat{AOD}) = 190^\circ \Leftrightarrow 5m(\widehat{AOD}) = 570^\circ \Leftrightarrow m(\widehat{AOD}) = 114^\circ \dots\dots 1p$$

$$\text{și } m(\widehat{COD}) = 76^\circ \dots\dots\dots 1 p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI –a

PROBLEMA 2.

1. Fie numărul $n = 2020^3$.
 - a) Să se descompună n în factori primi.
 - b) Să se demonstreze că oricum am alege 9 divizori naturali ai lui n , între ei există doi a căror produs este pătrat perfect.
 - c) Să se afle cel mai mic număr natural nenul m astfel încât oricum am alege m divizori ai numărului n între ei să existe doi a căror produs să nu fie pătrat perfect.

Barem

- a) $n = 2020^3 = 2^6 \cdot 5^3 \cdot 101^3$ **2p**
- b) Un divizor al lui n este de forma $2^x \cdot 5^y \cdot 101^z$, unde y, z sunt numere naturale mai mici sau egale cu 3 iar x număr natural mai mic decât 7.
Fie $d_1 = 2^x \cdot 5^y \cdot 101^z$ și $d_2 = 2^a \cdot 5^b \cdot 101^c$ atunci $d_1 \cdot d_2 = 2^{x+a} \cdot 5^{y+b} \cdot 101^{z+c}$ e pătrat perfect dacă și numai dacă $x + a, y + b, z + c$ sunt pare adică x și a au aceeași paritate, y și b au aceeași paritate respectiv z și c au aceeași paritate.....**1p**

Divizorii lui n sunt de forma $2^x \cdot 5^y \cdot 101^z$, în funcție de paritățile lui x, y, z avem 8 grupe posibile:

- (1) $x - par, y - par, z - par$
- (2) $x - par, y - impar, z - par$
- (3) $x - impar, y - par, z - par$
- (4) $x - impar, y - impar, z - par$
- (5) $x - par, y - par, z - impar$
- (6) $x - par, y - impar, z - impar$
- (7) $x - impar, y - par, z - impar$
- (8) $x - impar, y - impar, z - impar$ **1p**

Deci oricum am alege 9 divizori între ei există doi care se află în aceeași grupă deci produsul lor este pătrat perfect.....**1p**

- c) De la 0 până la 3 avem 2 numere pare și 2 numere impare, iar de la 0 până la 6 avem 4 numere pare și 3 numere impare deci cele mai multe elemente le avem în grupele (1), (2), (5), (6) unde avem $4 \cdot 2 \cdot 2$ adică 16 numere.

Dacă am alege cel mult 16 divizori ar fi posibil ca toți să fie din aceeași grupă deci produsul oricăror doi să fie pătrat perfect.....**1p**

Oricum alegem 17 vor exista cel puțin doi care să se afle în grupe diferite deci produsul lor nu va fi pătrat perfect

Deci $m = 17$. **1p**

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI –a

PROBLEMA 3.

Se consideră mulțimile $A = \{ 3p+2 \mid p \in \mathbb{N} \}$, $B = \{ 5k+4 \mid k \in \mathbb{N} \}$ și $C = \{ 15m+14 \mid m \in \mathbb{N} \}$.

- Verificați dacă numerele 14 și 29 aparțin mulțimii $A \cap B$.
- Arătați că $A \cap B = C$.
- Aflați câte numere x îndeplinesc condițiile $x \in C$ și $500 \leq x \leq 1000$.

Soluție (barem de corectare)

- $14 = 3 \times 4 + 2$ și $14 = 5 \times 2 + 4 \Rightarrow 14 \in A \cap B$ 1p
 $29 = 3 \times 7 + 2$ și $29 = 5 \times 5 + 4 \Rightarrow 29 \in A \cap B$ 1p
- Fie $x \in A \cap B \Rightarrow x = 3p+2 = 5k+4 \Rightarrow 3p = 5k+2 \Rightarrow 3p = 5(k-2)+12 \Rightarrow 3(p-4) = 5(k-2)$ 1p
 $p-4 \in M_5 \Rightarrow p \in M_{5+4} \Rightarrow x \in M_{15} + 14 \Rightarrow x \in C$ 1p
Fie $x \in C \Rightarrow x = 3 \cdot (5m + 4) + 2 \in A$ și $x = 5 \cdot (3m + 2) + 4 \in B \Rightarrow A \cap B = C$ 1p
- $500 \leq 15m+14 \leq 1000$ 1p
 $32,4 \leq m \leq 65,7(3)$, $m \in \{ 33,34, \dots, 65 \}$, sunt 33 numere 1p

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI –a

PROBLEMA 4.

Se consideră numerele strict pozitive și distincte x_1, x_2, \dots, x_{63} astfel încât

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{63}} > 6.$$

Arătați că cel puțin unul dintre aceste numere nu este natural.

Soluție:

Presupunem că $x_1, x_2, \dots, x_{63} \in \mathbb{N}$ și fiind distincte fără a restrânge generalitatea considerăm că

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{63} \Rightarrow x_1 \geq 1; x_2 \geq 2; \dots x_{63} \geq 63$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{63}} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{63} = S_1$$

$$S_1 = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{31}\right) + \left(\frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{63}\right)$$

$$S_1 < 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \frac{1}{16} \cdot 16 + \frac{1}{32} \cdot 32 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$$

$\Rightarrow S < 6$ contradicție \Rightarrow cel puțin un număr nu este natural.

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;