OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V –a

PROBLEMA 1.

Un număr x de 7 cifre format cu cifrele $0, 1, 2, 3,4$,5 $și$ 6 are proprietățile:

i) Fiecare cifră a numărului x apare în număr exact o dată;
ii) Suma oricăror trei cifre consecutive ale numărului x este divizibilă cu trei;
iii) Oricare două cifre alăturate ale numărului x au parități diferite;
iv) Numărul format din primele două cifre ale numărului x este un număr prim.
Să se afle numărul x.

Barem

Fie x = $\overline{abcdefg}$ numărul căutat.

Deoarece, $\overline{ab}$ este număr prim avem b = 1 sau b = 3. .... *1p*

1. $b = 1 \Rightarrow a = 4\ sau\ a = 6$ *1*p
   dacă a = 4 și b = 1 atunci nu există c care să verifice condiția ii)..*1p*
   dacă a = 6 și b = 1 atunci c = 2, d = 3, e = 4, f = 5 și g = 0 ....*1p*
   deci x = 6123450
2. $b = 3 \Rightarrow a = 2\ sau\ a = 4$

   dacă a = 2 și b = 3 atunci c =4, d = 5, e = 6, f = 1 și g = 0

   X = 2345610, nu verifică condiția ii) *1p*

   dacă a = 4 și b = 3 atunci c =2, d = 1, e = 6 , f = 5 și g = 0

   x = 4321640, nu verifică condiția ii) *1p*

   Singura soluție este x = 6123450. ....*1p*

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V –a

PROBLEMA 2.

Determinați ultima cifră a numărului $4^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)\dots(a_{2019}+a_1)}-1$ unde $a_1, a_2, a_{3,} \dots a_{2019}$ sunt numere naturale nenule.

Gazeta Matematică 6-7-8

Barem

Presupunem că $(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)\dots(a_{2019}+a_1) = impar$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1+a_2 = impar \\ a_2+a_3 = impar \\ a_3+a_4 = impar \\ . \\ . \\ . \\ \underline{a_{2019}+a_1 = impar} \end{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 2p$$

$2(a_1+a_2+a_3+\dots+a_{2019}) = impar$(sumă de 2019 termeni impari) Contradicție. *2p*

$\Rightarrow (a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)\dots(a_{2019}+a_1) = par$ *1p*

$u\left(4^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)\dots(a_{2019}+a_1)}-1\right) = 5$ *2p*

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V –a

PROBLEMA 3.

Aflați cifrele a, b, c, x, y dacă $\overline{abc}+\overline{ab}+c=\overline{cxya}$

Soluție (barem de corectare)

Relația se scrie 109a+11b=998 c+100x+10y. 1p

Din a, b cifre avem 109a+11b$\leq 1080 \Rightarrow c=1$...1p

Relația devine 109a+11b=998+100x+10y.

Din 109a+11b≤ 1080 și 109a+11b=998+100x+10y.

avem 998+100x+10y≤ 1080 sau 100x+10y≤ 82, *deci* $x=0$,

Relația devine $109a+11b=998+10y$.

Dacă a≤8 atunci 109a≤ 872 *și din* $11b\leq 99$ *obținem* $109a+11b\leq 971$,

adică 998+10y≤ 971, ...2p

Deci a = 9

Relația devine 981+11b=998+10y sau 11b=17+10y, de unde b=7, și y=6 ....2p

Concluzie a=9, b=7, c=1, x=0,y=6 ....1p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*

[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V –a

PROBLEMA 4.

Fie n un număr natural nenul și S_n suma primelor n numere naturale impare care nu sunt divizibile cu 5.
a.) Arătați că dacă n se divide cu 4, atunci S_n se divide cu 5n.
b.) Aflați restul împărțirii lui S_{2020} la 2021.

Soluție (barem de corectare)

a) Numerele impare care nu se divid cu 5 sunt de forma 10k+1, 10k+3, 10k+7, 10k+9, unde k este număr natural. Într-adevăr pentru k=0 numerele sunt 1, 3, 7, 9, pentru k=1, avem 11, 13, 17, 19 numere care nu se divid cu 5...1p.

Deci numărul termenilor se divide cu 4, atunci n=4k+4 și îi putem grupa câte 4 astfel

$$S_n = (1+3+7+9) + (11+13+17+19) + \cdots + (10k+1+10k+3+10k+7+10k+9)$$

$= 20 + 60 + \cdots + (40k+20) = 20[1+3+\cdots+(2k+1)] = 20(k+1)^2 = 5 \cdot 4(k+1)^2 = 5n$, deci S_n se divide cu 5n. 2p

b) Scriem 2020=4·505...1p

Atunci $S_{2020} = 20 \cdot 505^2 = 4 \cdot 5 \cdot 505 \cdot 505 = 4 \cdot 505 \cdot 5 \cdot 505 = 2020 \cdot 2525 = 2020 \cdot (2021 + 504) = 2020 \cdot 2021 + 2020 \cdot 504 = 2020 \cdot 2021 + (2021 - 1) \cdot 504 = M_{2021} - 504 = M_{2021} + 1517$ 2p

Restul este 1517..1p

Notă:

[1]*Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;*
[2]*Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;*