PROBLEMA 1.

Un număr x de 7 cifre format cu cifrele $0, 1, 2, 3,4 ,5 și 6$ are proprietățile:

1. Fiecare cifră a numărului x apare în număr exact o dată;
2. Suma oricăror trei cifre consecutive ale numărului x este divizibilă cu trei;
3. Oricare două cifre alăturate ale numărului x au parități diferite;
4. Numărul format din primele două cifre ale numărului x este un număr prim.

Să se afle numărul x.

Barem

Fie x = $\overbar{abcdefg}$ numărul căutat.

Deoarece, $\overbar{ab}$ este număr prim avem b = 1 sau b = 3. *………………………………………………………………………………….. 1p*

1. $b=1 ⇒a=4 sau a=6 $ ................................................................................................................ *1*p

*dacă a = 4 și b = 1 atunci nu există c care să verifice condiția ii)..........................................................1p*

*dacă a = 6 și b = 1 atunci c = 2, d = 3, e = 4, f = 5 și g = 0 ......................................................................1p*

*deci x = 6123450*

1. $b=3 ⇒a=2 sau a=4$

*dacă a = 2 și b = 3 atunci c =4, d = 5, e = 6, f = 1 și g = 0*

*X = 2345610, nu verifică condiția ii) ………………......................................................................................1p*

*dacă a = 4 și b = 3 atunci c =2, d = 1, e = 6 , f = 5 și g = 0*

*x = 4321640, nu verifică condiția ii) …………………....................................................................................1p*

*Singura soluție este x = 6123450. ........................................................................................................1p*

PROBLEMA 2.

Determinați ultima cifră a numărului $4^{\left(a\_{1}+a\_{2}\right)\left(a\_{2}+a\_{3}\right)\left(a\_{3}+a\_{4}\right)…(a\_{2019}+a\_{1})}-1$ unde $a\_{1},a\_{2},a\_{3,}…a\_{2019}$ sunt numere naturale nenule.

Gazeta Matematică 6-7-8

Barem

Presupunem că $\left(a\_{1}+a\_{2}\right)\left(a\_{2}+a\_{3}\right)\left(a\_{3}+a\_{4}\right)…\left(a\_{2019}+a\_{1}\right)=impar$

$$⟹\left\{\begin{array}{c}a\_{1}+a\_{2}=impar\\a\_{2}+a\_{3}=impar\\a\_{3}+a\_{4}=impar\\.\\.\\.\\\overline{a\_{2019}+a\_{1}=impar}\end{array}\right.…………………………………………………………………………………2p$$

$2(a\_{1}+a\_{2}+a\_{3}+…+a\_{2019})=impar$(sumă de 2019 termeni impari) Contradicție. *…………………2p*

$⟹\left(a\_{1}+a\_{2}\right)\left(a\_{2}+a\_{3}\right)\left(a\_{3}+a\_{4}\right)…\left(a\_{2019}+a\_{1}\right)=par$ *.................................................................1p*

$u\left(4^{\left(a\_{1}+a\_{2}\right)\left(a\_{2}+a\_{3}\right)\left(a\_{3}+a\_{4}\right)…(a\_{2019}+a\_{1})}-1\right)=5$ *....................................................................................2p*

PROBLEMA 3.

Aflați cifrele *a, b, c, x, y*  dacă $\overbar{abc}+\overbar{ab}+c=\overbar{cxya}$

**Soluție** (barem de corectare)

Relația se scrie 109a+11b=998 c+100x+10y. .......................................................................................1p

Din a, b cifre avem 109a+11b$\leq 1080 =>c=1$................................................................................1p

Relația devine 109a+11b=998+100x+10y.

Din 109a+11b$\leq 1080 și $ 109a+11b=998+100x+10y.

avem 998+100x+10y$\leq 1080$ sau 100x+10y$\leq 82 , deci x=0,$

$ Relația devine 109a+11b=998+10y$.

Dacă a$\leq $8 atunci 109a$\leq 872 și din 11b\leq 99 obținem 109a+11b\leq 971$,

adică 998+10y$\leq 971, $..............................................................................................................................2p

Deci a = 9

Relația devine 981+11b=998+10y sau 11b=17+10y, de unde b=7, și y=6 .............................................2p

Concluzie a=9, b=7, c=1, x=0,y=6 ............................................................................................................1p

PROBLEMA 4.

Fie n un număr natural nenul și $S\_{n}$ suma primelor n numere naturale impare care nu sunt divizibile cu 5.

a.) Arătați că dacă n se divide cu 4, atunci $S\_{n}$ se divide cu 5n.

b.) Aflați restul împărțirii lui $S\_{2020}$ la 2021.

**Soluție** (barem de corectare)

1. Numerele impare care nu se divid cu 5 sunt de forma 10k+1, 10k+3, 10k+7, 10k+9, unde k este număr natural. Într-adevăr pentru k=0 numerele sunt 1, 3, 7, 9, pentru k=1, avem 11, 13, 17, 19 numere care nu se divid cu 5..............................................................................................................1p.

Deci numărul termenilor se divide cu 4, atunci n=4k+4 și îi putem grupa câte 4 astfel

$$S\_{n}=\left(1+3+7+9\right)+\left(11+13+17+19\right)+…+\left(10k+1+10k+3+10k+7+10k+9\right)$$

$=20+60+…+\left(40k+20\right)=20\left[1+3+…+\left(2k+1\right)\right]=20\left(k+1\right)^{2}=5∙4\left(k+1\right)^{2}=5n,$ deci $S\_{n}$ se divide cu 5n. ..................................................................................................................2p

1. Scriem 2020=4∙505............................................................................................................1p

Atunci $S\_{2020}=20∙505^{2}=4∙5∙505∙505=4∙505∙5∙505=2020∙2525=2020∙\left(2021+504\right)=2020∙2021+2020∙504=2020∙2021+\left(2021-1\right)∙504=M\_{2021}-504=M\_{2021}+1517$ ..................................................................................................................2p

Restul este 1517........................................................................................................................1p