



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a V-a

**1. FELADAT** Öt, páronként különböző, természetes szám összege 575. Tudva, hogy ezek közül a legnagyobb szám és mindegyik másik számmal vett különbségek összege 10, számítsátok ki az öt számot.

**2. FELADAT** Határozzátok meg azokat az  $x$  természetes számokat amelyekre igaz, hogy  $x$ -et összeadva az  $x$  számjegyei összegével 2018-at kapunk.

**3. FELADAT** Egy képernyőn egy természetes szám van kiírva. **Lépés** alatt a következőt értjük: a képernyőn kiírt számot kicseréljük a szám számjegyei szorzatának és a 23-nak az összegével. Tudjuk, hogy a képernyőn kiírt első szám a 23.

- Határozzátok meg 10 lépés után a képernyőn látható számot.
- Határozzátok meg a képernyőn kiírt 2018-adik számot.

**4. FELADAT** Adottak az  $a$  és  $b$  számok,

$$a = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + 2017 \cdot 2018$$

$$b = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + \dots + 2018 \cdot 2019.$$

- Határozzátok meg a  $b - a$  szám utolsó számjegyét.
- Mutassátok ki, hogy az  $a + b + 2018$  szám nem teljes négyzet (nem négyzetszám).



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a VI-a

**1. Feladat** Határozzátok meg azokat az  $x, y, z \in \mathbb{N}$ ,  $z \neq 0$  számokat, amelyekre  $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{30}{13}$ .

**2. Feladat** Adottak a következő természetes számok:  $a = 5n + 6$ ,  $b = 4n + 5$  és  $c = n + 1$ , ahol  $n \in \mathbb{N}$ . Mutassátok ki, hogy:

a)  $[b, c] = b \cdot c$ ;

b)  $(a, b) + (a, c)$  páros szám.

( $[x, y]$  az  $x$  és  $y$  számok legkisebb közös többszöröse, illetve  $(x, y)$  az  $x$  és  $y$  számok legnagyobb közös osztója )

**3. Feladat** Legyen  $ABC$  egy általános háromszög. A háromszögon kívül megszerkesztjük az  $MAB$  és  $NAC$  egyenlőszárú háromszögeket,  $[AB] \equiv [AM]$  és  $[AC] \equiv [AN]$  úgy, hogy  $[MC] \equiv [BN]$ . Bizonyítsátok be, hogy  $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CAN$ .

**4. Feladat** Egy  $O$  pont körül adottak a következő szögek  $\widehat{A_1OA_2}$ ,  $\widehat{A_2OA_3}, \dots, \widehat{A_nOA_{n+1}}$ ,  $\widehat{A_{n+1}OA_1}$  úgy, hogy  $m(\widehat{A_1OA_2}) = 1^\circ$ ,  $m(\widehat{A_2OA_3}) = 2^\circ$ ,  $m(\widehat{A_3OA_4}) = 3^\circ, \dots, m(\widehat{A_nOA_{n+1}}) = n^\circ$ , ahol  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Ha  $m(\widehat{A_{n+1}OA_1}) = 9^\circ$ , határozzátok meg az  $n$  számot.



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a VII-a

**1. Feladat** Határozzátok meg azokat az  $(a, b)$  természetes számpárokat,  $a \geq b$ , amelyekre az

$$A = \frac{a-b}{1+ab} \text{ természetes szám.}$$

**2. Feladat** a) Ha  $a$  és  $b$  két pozitív racionális szám  $a < b$ , akkor igazoljátok, hogy  $\frac{1}{b} < \frac{1}{\sqrt{a \cdot b}} < \frac{1}{a}$ ;

b) Igazoljátok, hogy  $\frac{2}{3} < (\sqrt{6})^{-1} + (\sqrt{15})^{-1} + (\sqrt{35})^{-1} < \frac{16}{15}$ .

**3. Feladat** Az  $ABC$  háromszögben legyen  $D$  az  $(AC)$  oldal felezőpontja,  $(DE$  és  $(DF$  pedig az  $\sphericalangle ADB$ , illetve  $\sphericalangle CDB$  szögek szögfelezői ( $E \in (AB)$ ,  $F \in (BC)$ ). Ha  $EF \cap DB = \{M\}$ , akkor mutassátok ki, hogy  $EF = 2 \cdot MD$ .

**4. Feladat** Adott az  $ABC$  egyenlőszárú háromszög, amelyben  $AB = AC$ . Legyen  $D$  a  $(BC)$  oldal felezőpontja,  $M$  az  $(AD)$  szakasz felezőpontja,  $N$  pedig a  $D$  pontból a  $BM$ -re húzott merőleges talppontja és  $E$  a  $B$  pont szimmetrikusa az  $M$  pontra nézve. Bizonyítsátok be, hogy:

a)  $ADCE$  téglalap ;

b)  $m(\sphericalangle ANC) = 90^\circ$ .



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a VIII-a

### 1. FELADAT

a) Igazoljátok, hogy  $(x + y + z) \cdot \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$ , bármely  $x, y, z \in (0, \infty)$ ;

b) Legyenek  $x, y, z \geq 1$  valós számok úgy, hogy  $x + y + z = 6$ . Mutassátok ki, hogy

$$\frac{x^2 + 3}{3x^2 + 1} + \frac{y^2 + 3}{3y^2 + 1} + \frac{z^2 + 3}{3z^2 + 1} \geq \frac{3}{2}.$$

2. FELADAT Adott az  $E(x) = 3x^3 + 9x^2 + 6x + 2$  kifejezés, ahol  $x \in \mathbb{N}$ .

a) Igazoljátok, hogy bármely  $x$  természetes szám esetén az  $x^3 + 3x^2 + 2x$  kifejezés felírható három egymásutáni természetes szám szorzataként.

b) Bizonyítsátok be, hogy nem létezik  $x \in \mathbb{N}$  amelyre  $E(x)$  köbszám (teljes köb).

3. FELADAT Legyen  $VABCD$  egy szabályos gúla,  $VO = AB = 12\text{cm}$ , ahol  $O$  az alaplap középpontja. Legyen az  $M$  pont az  $O$  pontnak  $CV$ -re eső vetülete, az  $N$  pont a  $[BC]$  szakasz felezőpontja, a  $G$  pont pedig a  $VAD$  háromszög súlypontja.

a) Igazoljátok, hogy  $\frac{VM}{MC} = 2$ .

b) Számítsátok ki az  $M$  pont távolságát a  $(VBD)$  síktól.

c) Bizonyítsátok be, hogy az  $M, N, G$  és  $A$  pontok koplanáris pontok.

4. FELADAT Adott az  $ABCD$  trapéz,  $AB \parallel CD$ ,  $\frac{AB}{CD} = \sqrt{3}$  és  $\{Q\} = AD \cap BC$ . Az  $(ABC)$  síkra.

emeljük a  $Q$  pontban az  $MQ$  merőlegest. Tudva, hogy  $m(\sphericalangle((MAB), (ABC))) = 30^\circ$ , számítsátok ki  $m(\sphericalangle((MAB), (MCD)))$ .



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a IX-a

**1. FELADAT** Oldjátok meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a)  $x[x] + x\{x\} + \{x\}[x] = x^2 + [x]^2 + \{x\}^2$ ;

b)  $\{x\} + \frac{1}{\{x\}} = [x] + \frac{1}{[x]}$ .

( ahol  $\{x\}$  és  $[x]$  az  $x$  valós szám törtrésze, illetve az egész része )

**2. FELADAT** Mutassátok ki, hogy bármely  $x$  és  $y$  valós számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

**3. FELADAT**

a) Bizonyítsátok be, hogy az  $ABC$  és  $A'B'C'$  háromszögeknek akkor és csak akkor esik egybe a súlypontja ha  $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = \vec{0}$ .

b) Az  $ABC$  háromszög oldalain felvesszük az  $M \in (BC), N \in (CA), P \in (AB)$  pontokat úgy,

hogy  $\frac{BM}{BC} = m, \frac{CN}{CA} = n, \frac{AP}{AB} = p$ . Legyen  $G$  és  $G'$  az  $ABC$  háromszög illetve az  $MNP$ .

háromszög súlypontja. Mutassátok ki, hogy:

i) A  $G'$  pont akkor és csakis akkor van rajta az  $ABC$  háromszög  $A$ -ból kiinduló oldalfelezőjén, ha  $n + p = 2m$ .

ii) A  $G$  és  $G'$  pontok akkor és csakis akkor esnek egybe, ha  $m = n = p$ .

**4. FELADAT** Legyen  $(x_n)_{n \geq 0}$  egy sorozat, melyben  $x_0 = 0, x_1 = 1$  és  $2x_n + 3x_{n+2} \leq 5x_{n+1}, \forall n \geq 0$ .

Mutassátok ki, hogy bármely  $n$  természetes szám esetén teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$x_n \leq 3 \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^n \right].$$



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală - 17. 02. 2018

Clasa a X-a

**1. FELADAT** Oldjátok meg a következő egyenletrendszeret: 
$$\begin{cases} |z-1-i| \leq \sqrt{2} \\ |z-3+i| = |z-1-i|, \text{ ahol } z \in \mathbb{C}. \\ |z-3+i| \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

**2. FELADAT** Legyen  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{C}^*$  ( $n \geq 2$ ) egy halmaz, azzal a tulajdonsággal, hogy  $a_i \cdot a_j \in M$ , bármely  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  esetén.

a) Mutassátok ki, hogy  $M = U_n$ , ahol  $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ ;

b) Határozzátok meg a következő halmaz elemeinek számát:  $\{f(x) \mid x \in [0, 1]\}$ , ahol

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) = \sum_{i=1}^n a_i^{[n \cdot x]}.$$

**3. FELADAT** Adott az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2^x - 2^{-x}$  függvény.

a) Mutassátok ki, hogy az  $f$  függvény bijektív és határozzátok meg a függvény inverzét ( $f^{-1}$ ).

b) Oldjátok meg a következő egyenletet az egész számok halmazán:  $2^x - 2^{-x} = \log_2 \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$ .

**4. FELADAT** Oldjátok meg az  $\mathbb{R}$  halmazon az  $\frac{a^{x^2}}{b^{2x}} + \frac{b^{x^2}}{a^{2x}} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$ , egyenletet, ahol  $a, b > 1$ .



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a XI-a

**1. FELADAT** Legyen  $A, B \in M_2(\mathbb{Q})$  úgy, hogy  $\det(\sqrt{2}A + B) = \det(A + B\sqrt{3}) = 0$ . Bizonyítsátok be, hogy:

a)  $\det A = \frac{1}{2}[(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)]$ ;

b)  $\det A = \det B$ ;

c)  $\operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(A \cdot B)$ .

**2. FELADAT** Legyen  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  úgy, hogy  $A^2 + A + I_n = O_n$ . Határozzátok meg az  $n$  értékét tudva, hogy  $\det(A^n + I_n) = 2^{2019}$ .

**3. FELADAT** Legyen  $a \in (0, 1)$ . Értelmezzük az  $(x_n)_{n \geq 0}$ , sorozatot, amelyben  $x_0 > 0$  és

$$x_n = a^2 + a + \sqrt{x_{n-1}} - 2a\sqrt{a + \sqrt{x_{n-1}}}, \quad n \geq 1.$$

Mutassátok ki hogy az  $(x_n)_{n \geq 0}$  sorozat konvergens és határozzátok meg a határértékét.

**4. FELADAT**

a) Határozzátok meg az  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  paramétereket úgy, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sqrt{an^2 + bn + c} - n - 2 \right) = 2018.$$

b) Számítsátok ki:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left( n\pi \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 5n - 2} \right)$ .



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a XII-a

**1. FELADAT** Legyen  $(G, \cdot)$  egy csoport, valamint  $H_1, H_2$  és  $H$  a csoport három részcsportja.

Mutassátok ki, hogy:

- $A \ H_1 \cap H_2$  a  $G$  részcsportja;
- $A \ H_1 \cup H_2$  akkor és csakis akkor részcsportja a  $G$ -nek ha  $H_1 \subseteq H_2$  vagy  $H_2 \subseteq H_1$ ;
- $H \subseteq H_1 \cup H_2$  akkor és csakis akkor, ha  $H \subseteq H_1$  vagy  $H \subseteq H_2$ .

**2. FELADAT** Legyen  $(G, \cdot)$  egy csoport és  $x, y \in G$  úgy, hogy  $x^2 = y^2 = (xy)^2$ . Mutassátok ki, hogy  $x^{2020} = y^{2020} = e$ , ahol  $e$  a csoport semleges eleme.

**3. FELADAT** Számítsátok ki  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\{x\}}{\sin x} dx$ , ahol  $\{x\}$  az  $x$  valós szám törtrésze.

**4. FELADAT** Határozzátok meg azokat az  $f : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$  integrálható függvényeket, amelyek rendelkeznek a következő tulajdonsággal:

$$f(x) - \int_0^1 (x+y) \cdot f(y) dy = x, \quad \forall x \in [0;1].$$