MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

ROMÂNIA 1918-2018 | SĂRBĂTORIM ÎMPREUNĂ

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a V-a

1. FELADAT Öt, páronként különböző, természetes szám összege 575. Tudva, hogy ezek közül a legnagyobb szám és mindegyik másik számmal vett különbségek összege 10, számítsátok ki az öt számot.

2. FELADAT Határozzátok meg azokat az x természetes számokat amelyekre igaz, hogy x- et összeadva az x számjegyei összegével 2018 -at kapunk.

3. FELADAT Egy képernyőn egy természetes szám van kiírva. **Lépés** alatt a következőt értjük: a képernyőn kiírt számot kicseréljük a szám számjegyei szorzatának és a 23-nak az összegével. Tudjuk, hogy a képernyőn kiírt első szám a 23.

a) Határozzátok meg 10 lépés után a képernyőn látható számot.

b) Határozzátok meg a képernyőn kiírt 2018 -adik számot.

4. FELADAT Adottak az a és b számok,

$$a = 1\cdot 2 + 3\cdot 4 + 5\cdot 6 + ... + 2017\cdot 2018$$

$$b = 2\cdot 3 + 4\cdot 5 + 6\cdot 7 + ... + 2018\cdot 2019.$$

a) Határozzátok meg a $b - a$ szám utolsó számjegyét.

b) Mutassátok ki, hogy az $a + b + 2018$ szám nem teljes négyzet (nem négyzetszám).

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a VI-a

1. Feladat Határozzátok meg azokat az $x, y, z \in \mathbb{N}$, $z \neq 0$ számokat, amelyekre $x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}=\dfrac{30}{13}$.

2. Feladat Adottak a következő természetes számok: $a=5n+6$, $b=4n+5$ és $c=n+1$, ahol $n \in \mathbb{N}$. Mutassátok ki, hogy:

a) $[b,c]=b \cdot c$;

b) $(a,b)+(a,c)$ páros szám.

($[x,y]$ az x és y számok legkisebb közös többszöröse, illetve (x,y) az x és y számok legnagyobb közös osztója)

3. Feladat Legyen ABC egy általános háromszög. A háromszögön kivül megszerkesztjük az MAB és NAC egyenlőszárú háromszögeket, $[AB] \equiv [AM]$ és $[AC] \equiv [AN]$ úgy, hogy $[MC] \equiv [BN]$. Bizonyítsátok be, hogy $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CAN$.

4. Feladat Egy O pont körül adottak a következő szögek $\widehat{A_1OA_2}$, $\widehat{A_2OA_3}, \ldots, \widehat{A_nOA_{n+1}}$, $\widehat{A_{n+1}OA_1}$ úgy, hogy $m(\widehat{A_1OA_2})=1°$, $m(\widehat{A_2OA_3})=2°$, $m(\widehat{A_3OA_4})=3°, \ldots$, $m(\widehat{A_nOA_{n+1}})=n°$, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

Ha $m(\widehat{A_{n+1}OA_1})=9°$, határozzátok meg az n számot.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a VII-a

1. Feladat Határozzátok meg azokat az (a,b) természetes számpárokat, $a \geq b$, amelyekre az $A = \dfrac{a-b}{1+ab}$ természetes szám.

2. Feladat a) Ha a és b két pozitív racionális szám $a < b$, akkor igazoljátok, hogy $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{\sqrt{a \cdot b}} < \dfrac{1}{a}$;

b) Igazoljátok, hogy $\dfrac{2}{3} < \left(\sqrt{6}\right)^{-1} + \left(\sqrt{15}\right)^{-1} + \left(\sqrt{35}\right)^{-1} < \dfrac{16}{15}$.

3. Feladat Az ABC háromszögben legyen D az (AC) oldal felezőpontja, $(DE$ és $(DF$ pedig az $\sphericalangle ADB$, illetve $\sphericalangle CDB$ szögek szögfelezői $\left(E \in (AB),\ F \in (BC)\right)$. Ha $EF \cap DB = \{M\}$, akkor mutassátok ki, hogy $EF = 2 \cdot MD$.

4. Feladat Adott az ABC egyenlőszárú háromszög, amelyben $AB = AC$. Legyen D a (BC) oldal felezőpontja, M az (AD) szakasz felezőpontja, N pedig a D pontból a BM-re húzott merőleges talppontja és E a B pont szimmetrikusa az M pontra nézve. Bizonnyítsátok be, hogy:

a) $ADCE$ téglalap ;

b) $m(\sphericalangle ANC) = 90°$.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a VIII-a

1. FELADAT

a) Igazoljátok, hogy $(x+y+z)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$, bármely $x,y,z\in(0,\infty)$;

b) Legyenek $x,y,z\geq 1$ valós számok úgy, hogy $x+y+z=6$. Mutassátok ki, hogy

$$\frac{x^2+3}{3x^2+1}+\frac{y^2+3}{3y^2+1}+\frac{z^2+3}{3z^2+1}\geq\frac{3}{2}.$$

2. FELADAT Adott az $E(x)=3x^3+9x^2+6x+2$ kifejezés, ahol $x\in\mathbb{N}$.

a) Igazoljátok, hogy bármely x természetes szám esetén az x^3+3x^2+2x kifejezés felírható három egymásutáni természetes szám szorzataként.

b) Bizonyítsátok be, hogy nem létezik $x\in\mathbb{N}$ amelyre $E(x)$ köbszám (teljes köb).

3. FELADAT Legyen $VABCD$ egy szabályos gúla, $VO=AB=12cm$, ahol O az alaplap középpontja. Legyen az M pont az O pontnak CV-re eső vetülete, az N pont a $[BC]$ szakasz felezőpontja, a G pont pedig a VAD háromszög súlypontja.

a) Igazoljátok, hogy $\frac{VM}{MC}=2$.

b) Számítsátok ki az M pont távolságát a (VBD) síktól .

c) Bizonyítsátok be, hogy az M,N,G és A pontok koplanáris pontok.

4. FELADAT Adott az $ABCD$ trapéz, $AB\parallel CD$, $\frac{AB}{CD}=\sqrt{3}$ és $\{Q\}=AD\cap BC$. Az (ABC) síkra. emeljük a Q pontban az MQ merőlegest. Tudva, hogy $m(\sphericalangle((MAB),(ABC)))=30^o$, számítsátok ki $m(\sphericalangle((MAB),(MCD)))$.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a IX-a

1. FELADAT Oldjátok meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $x[x]+x\{x\}+\{x\}[x]=x^2+[x]^2+\{x\}^2$;

b) $\{x\}+\dfrac{1}{\{x\}}=[x]+\dfrac{1}{[x]}$.

(ahol $\{x\}$ és $[x]$ az x valós szám törtrésze, illetve az egész része)

2. FELADAT Mutassátok ki, hogy bármely x és y valós számokra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|}\le\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}\le\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}.$$

3. FELADAT

a) Bizonyítsátok be, hogy az ABC és $A'B'C'$ háromszögeknek akkor és csakis akkor esik egybe a súlypontja ha $\overleftrightarrow{AA'}+\overleftrightarrow{BB'}+\overleftrightarrow{CC'}=\overleftrightarrow{0}$.

b) Az ABC háromszög oldalain felvesszük az $M\in(BC), N\in(CA), P\in(AB)$ pontokat úgy, hogy $\dfrac{BM}{BC}=m, \dfrac{CN}{CA}=n, \dfrac{AP}{AB}=p$. Legyen G és G' az ABC háromszög illetve az MNP. háromszög súlypontja. Mutassátok ki, hogy:

i) A G' pont akkor és csakis akkor van rajta az ABC háromszög A-ból kiinduló oldalfelezőjén, ha $n+p=2m$.

ii) A G és G' pontok akkor és csakis akkor esnek egybe, ha $m=n=p$.

4. FELADAT Legyen $(x_n)_{n\ge0}$ egy sorozat, melyben $x_0=0$, $x_1=1$ és $2x_n+3x_{n+2}\le5x_{n+1}, \forall\, n\ge0$.
Mutassátok ki, hogy bármely n természetes szám esetén teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$x_n\le3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a X-a

1. FELADAT Oldjátok meg a következő egyenletrendszert: $\begin{cases} |z-1-i| \le \sqrt{2} \\ |z-3+i| = |z-1-i| \\ |z-3+i| \ge \sqrt{2} \end{cases}$, ahol $z \in \mathbb{C}$.

2. FELADAT Legyen $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset \mathbb{C}^*$ $(n \ge 2)$ egy halmaz, azzal a tulajdonsággal, hogy $a_i \cdot a_j \in M$, bármely $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ esetén.

a) Mutassátok ki, hogy $M = U_n$, ahol $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$;

b) Határozzátok meg a következő halmaz elemeinek számát: $\{f(x) \mid x \in [0,1]\}$, ahol $f : [0,1] \to \mathbb{C}$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^{[n \cdot x]}$.

3. FELADAT Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ függvény.

a) Mutassátok ki, hogy az f függvény bijektív és határozzátok meg a függvény inverzét(f^{-1}).

b) Oldjátok meg a következő egyenletet az egész számok halmazán: $2^x - 2^{-x} = \log_2 \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$.

4.FELADAT Oldjátok meg az $\mathbb{R}$ halmazon az $\frac{a^{x^2}}{b^{2x}} + \frac{b^{x^2}}{a^{2x}} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$, egyenletet, ahol $a, b > 1$.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a XI-a

1. FELADAT Legyen $A, B \in M_2(\mathbb{Q})$ úgy, hogy $\det(\sqrt{2}A + B) = \det(A + B\sqrt{3}) = 0$. Bizonyítsátok be, hogy:

a) $\det A = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\right]$;

b) $\det A = \det B$;

c) $\operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(A \cdot B)$.

2. FELADAT Legyen $A \in M_n(\mathbb{R}),\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ úgy, hogy $A^2 + A + I_n = O_n$. Határozzátok meg az n értékét tudva, hogy $\det(A^n + I_n) = 2^{2016}$.

3. FELADAT Legyen $a \in (0,1)$. Értelmezzük az $(x_n)_{n\geq 0}$, sorozatot, amelyben $x_0 > 0$ és

$$x_n = a^2 + a + \sqrt{x_{n-1}} - 2a\sqrt{a + \sqrt{x_{n-1}}},\quad n \geq 1.$$

Mutassátok ki hogy az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat konvergens és határozzátok meg a határértékét.

4. FELADAT

a) Határozzátok meg az $a, b, c \in \mathbb{R},\quad a > 0$ paramétereket úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{an^2 + bn + c} - n - 2\right) = 2018.$$

b) Számítsátok ki: $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(n\pi\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 5n - 2}\right)$.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a XII-a

1. FELADAT Legyen $(G,\cdot)$ egy csoport, valamint H_1, H_2 és H a csoport három részcsoportja. Mutassátok ki, hogy:

a) A $H_1 \cap H_2$ a G részcsoportja;

b) A $H_1 \cup H_2$ akkor és csakis akkor részcsoportja a G-nek ha $H_1 \subseteq H_2$ vagy $H_2 \subseteq H_1$;

c) $H \subseteq H_1 \cup H_2$ akkor és csakis akkor, ha $H \subseteq H_1$ vagy $H \subseteq H_2$.

2. FELADAT Legyen $(G,\cdot)$ egy csoport és $x, y \in G$ úgy, hogy $x^2 = y^2 = (xy)^2$. Mutassátok ki, hogy $x^{2020} = y^{2020} = e$, ahol e a csoport semleges eleme.

3. FELADAT Számítsátok ki $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\{x\}}{\sin x} dx$, ahol $\{x\}$ az x valós szám törtrésze.

4. FELADAT Határozzátok meg azokat az $f:[0;1] \to \mathbb{R}$ integrálható függvényeket, amelyek rendelkeznek a következő tulajdonsággal:

$$f(x) - \int_0^1 (x+y) \cdot f(y) dy = x, \quad \forall\, x \in [0;1].$$