OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 5. 03. 2016
BAREM DE CORECTARE - Clasa a V – a

PROBLEMA 1. Radu şi Alexandra au împreună 11 lei. Ei hotărăsc să cumpere împreună o carte, participând cu sume egale de bani. Radu este nevoit să împrumute de la Alexandra 1 leu, iar după cumpărarea cărţii Alexandra rămâne cu 5 lei.

a) Aflaţi preţul cărţii;

b) Câţi lei a avut Alexandra iniţial?

Barem de corectare. Metoda algebrică (alternativ, metoda figurativă):

$(2p)$ a) Preţul cărţii este $11 - 5 = 6$ lei.

$(3p)$ b) Fie R suma de bani pe care o are Radu şi fie A suma de bani pe care o are Alexandra. Deoarece $R + A = 11$ şi $R + 1 = A - 1 - 5$,

$(2p)$ obţinem $A = R + 7$, de unde găsim că $R = 2$ şi $A = 9$.

PROBLEMA 2. Arătaţi că dintre oricare 5 puteri ale lui 3, există cel puţin două, a căror diferenţă este divizibilă cu 5.

Barem de corectare.

$(2p)$ Deoarece ultima cifră a numărului 3^x poate fi $1,\ 3,\ 9$ sau 7,

$(3p)$ din cele cinci puteri ale lui 3, vor fi cel puţin două având aceeaşi ultima cifră.

$(2p)$ Diferenţa acestora are ultima cifră 0, deci este divizibilă cu 5.

PROBLEMA 3. Mulţimea A de numere naturale are proprietăţile:

(i) $2 \in A$;

(ii) dacă $x \in A$, atunci $4x \in A$;

(iii) dacă $9x + 11 \in A$, atunci $x \in A$.

Arătaţi că $13 \in A$.

Barem de corectare.

$(2p)$ Pentru a obţine $13 \in A$, este suficient să arătăm că $9 \cdot 13 + 11 = 128 \in A$.

$(2p)$ Din fapul că $2 \in A$, obţinem $4 \cdot 2 = 8 \in A$

$(2p)$ $\Rightarrow 4 \cdot 8 = 32 \in A$

$(1p)$ $\Rightarrow 4 \cdot 32 = 128 \in A$.

PROBLEMA 4. Pe o tablă sunt desenate 20 de cercuri albe, 21 de cercuri roşii şi 22 de cercuri verzi. Se şterg două cercuri de culori diferite şi se desenează în loc un cerc de a treia culoare. Această operaţie se repetă astfel încât pe tablă să rămână un singur cerc. Precizaţi culoarea cercului rămas pe tablă. Justificaţi răspunsul.

Barem de corectare. Vom ilustra modificările ce intervin odată cu efectuarea unei operaţii, astfel:

		Alb	**Roşu**	**Verde**
$(2p)$	Iniţial:	par	impar	par
$(2p)$	După prima operaţie:	impar	par	impar
	După a doua operaţie:	par	impar	par

e.t.c.

$(3p)$ Pentru a rămâne un cerc pe tablă, este necesar să avem $0, 0, 1$ (nu neapărat în această ordine), adică două numere pare şi unul impar. În concluzie, cercul rămas este unul roşu.

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 5. 03. 2016
BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI – a

PROBLEMA 1. În triunghiul ABC se iau mijloacele M, N şi P ale laturilor $[AB]$, $[BC]$, respectiv $[AC]$. Se consideră punctul $E \in (NP$ astfel încât $[NP] \equiv [PE]$ şi punctul $D \in (CM$ astfel încât $[CM] \equiv [MD]$. Să se arate că:

a) $AE = NC$;

b) $AD = 2 \cdot AE$.

Barem de corectare.

(1*p*) *a*) Din congruenţa triunghiurilor $\Delta APE \equiv \Delta CPN$,
(2*p*) obţinem că $AE = NC$.
(1*p*) *b*) Din congruenţa triunghiurilor $\Delta AMD \equiv \Delta BMC$,
(1*p*) obţinem $AD = BC$.
(1*p*) Din punctul *a*), avem $AE = \dfrac{BC}{2}$.
(1*p*) Deci $AD = 2 \cdot AE$.

PROBLEMA 2. Fie mulţimea $A = \left\{n \,\middle|\, n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c,\ \text{unde } a, b, c \in \mathbb{N}\right\}$.

a) Arătaţi că $81 \in A$;

b) Determinaţi elementele din mulţimea A care au exact 6 divizori.

Barem de corectare.

(4*p*) *a*) Din $81 = 2^0 \cdot 3^4 \cdot 5^0$, rezultă că $81 \in A$.
(1*p*) *b*) Deoarece numărul divizorilor unui număr de forma $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ este $(a+1)(b+1)(c+1)$,
(2*p*) avem următoarele cazuri:

a	b	c	n
0	0	5	3125
0	5	0	243
5	0	0	32
0	1	2	75
0	2	1	45
1	2	0	18
1	0	2	50
2	1	0	12
2	0	1	20

PROBLEMA 3. Se consideră unghiul ascuţit $\widehat{XOY}$. În semiplanul determinat de OX şi în care nu se află semidreapta $[OY$, se duc semidreptele $[OA$ şi $[OB$, perpendiculare pe $[OX$ şi respectiv, pe $[OY$. Se notează cu $[OC$ bisectoarea unghiului $\widehat{BOX}$.

a) Dacă măsura unghiului $\widehat{AOC}$ este cu $16°$ mai mare decât măsura unghiului $\widehat{XOY}$, determinaţi $m\left(\widehat{XOY}\right)$;

b) Arătaţi că dacă $[OB$ este bisectoarea $\widehat{AOC}$, atunci $[OX$ este bisectoarea $\widehat{COY}$.

Barem de corectare.

(1*p*) *a*) Din $m\left(\widehat{AOB}\right) = 90° - m\left(\widehat{XOB}\right) = m\left(\widehat{XOY}\right)$

(1*p*) şi $m\left(\widehat{AOC}\right) = m\left(\widehat{AOB}\right) + m\left(\widehat{BOC}\right) = m\left(\widehat{XOY}\right) + m\left(\widehat{BOC}\right)$

(1*p*) obţinem că $m\left(\widehat{BOC}\right) = m\left(\widehat{AOC}\right) - m\left(\widehat{XOY}\right) = 16°$ şi $m\left(\widehat{XOB}\right) = 2 \cdot m\left(\widehat{BOC}\right) = 32°$.

(1*p*) Deci $m\left(\widehat{XOY}\right) = 90° - m\left(\widehat{XOB}\right) = 90° - 32° = 58°$.

(3*p*) *b*) Deoarece, $m\left(\widehat{AOB}\right) = m\left(\widehat{BOC}\right)$, $m\left(\widehat{BOC}\right) = m\left(\widehat{XOC}\right)$ şi $m\left(\widehat{AOB}\right) = m\left(\widehat{XOY}\right)$, rezultă că $m\left(\widehat{XOC}\right) = m\left(\widehat{XOY}\right)$.

PROBLEMA 4. Spunem că un număr de forma $\overline{0,abcde}$ are proprietatea (P), dacă cifrele a, b, c, d, e aparţin mulţimii $\{4, 6\}$.

a) Arătaţi că soluţia ecuaţiei $x + 0,46646 = 1,1111$ are proprietatea (P);

b) Determinaţi câte numere diferite de forma $\overline{0,abcde}$ au proprietatea (P);

c) Arătaţi că din oricare 17 numere diferite de forma $\overline{0,abcde}$ care au proprietatea (P), se pot alege două a căror sumă să fie $1,1111$.

Barem de corectare.

(2*p*) *a*) Soluţia ecuaţiei este $x = 1,1111 - 0,46646 = 0,64464$, care are proprietatea (P);

(2*p*) *b*) Pentru fiecare cifră a, b, c, d, e sunt două posibilităţi de alegere; fiind 5 cifre, avem $2^5 = 32$ numere cu proprietatea (P);

(3*p*) *c*) Numerele cu proprietatea (P) pot fi grupate în perechi de forma $\overline{0,a_1a_2a_3a_4a_5}$ şi $\overline{0,b_1b_2b_3b_4b_5}$ astfel încât

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = ... = a_5 + b_5 = 10.$$

Suma a două astfel de numere din cele 16 perechi este $1,1111$; deci fiind 17 numere, există două numere care formează o astfel de pereche.

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 5. 03. 2016
BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII – a

PROBLEMA 1. Se consideră numerele raţionale distincte $a_1, a_2, ..., a_n$, astfel încât din oricare patru dintre ele există două care au produsul -1.

a) Daţi un exemplu de 6 astfel de numere;

b) Aflaţi valoarea maximă a lui n.

Barem de corectare.

$(3p)$ *a*) De exemplu, numerele $2, 3, 4, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ verifică cerinţele din enunţ; în general, putem lua numerele a, b, c, $-\frac{1}{a}$, $-\frac{1}{b}$, $-\frac{1}{c}$, unde a, b şi c sunt numere distincte din $\mathbb{Q}^*$.

$(3p)$ *b*) Dacă $n \geq 7$, atunci cel puţin 4 dintre cele n numere au acelaşi semn. Aşadar, în acest caz, există 4 numere dintre care nu putem alege două a căror produs să fie -1.

$(1p)$ Deci, valoarea maximă a lui n este 6.

PROBLEMA 2. Să se arate că dacă numerele strict pozitive $a, b, c \in \mathbb{Q}$ verifică relaţia $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$, atunci:

a) $\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c} + \frac{b+c}{b+2c+3a} + \frac{c+a}{c+2a+3b}} \in \mathbb{Q}$;

b) $\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)} + \frac{bc}{a(2b-c)} + \frac{ca}{b(2c-a)}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Barem de corectare.

$(2p)$ Din ipoteză, obţinem că $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$.

$(3p)$ Deci $\begin{cases} 2a = b+c \\ 2b = a+c \\ 2c = a+b \end{cases}$, de unde rezultă că $a = b = c$.

Aşadar, avem:

$(1p)$ $\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c} + \frac{b+c}{b+2c+3a} + \frac{c+a}{c+2a+3b}} = \sqrt{\frac{2a}{6a} + \frac{2a}{6a} + \frac{2a}{6a}} = 1 \in \mathbb{Q}$

$(1p)$ $\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)} + \frac{bc}{a(2b-c)} + \frac{ca}{b(2c-a)}} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2} + \frac{a^2}{a^2} + \frac{a^2}{a^2}} = \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

PROBLEMA 3. Fie triunghiul ABC şi M mijlocul laturii $[BC]$. Daca N este mijlocul segmentului $[AM\ ]$ şi $BN \cap AC = \{P\}$, determinaţi raportul dintre aria patrulaterului $MCPN$ şi aria triunghiului ABC.

Barem de corectare. Fie $MR \parallel BP$ $(R \in PC)$ şi $S = A_{ANP}$.

(1p) Deoarece $MR = \dfrac{BP}{2}$,

(2p) obţinem că $NP = \dfrac{MR}{2} = \dfrac{BP}{4}$, de unde $A_{ABN} = 3A_{ANP} = 3S$.

(1p) Dar cum $A_{ABN} = A_{BMN} = 3S$

(1p) şi $A_{ABM} = A_{AMC} = 6S$, rezultă că $A_{ABC} = 12S$

(1p) şi $A_{MCPN} = A_{AMC} - A_{ANP} = 5S$.

(1p) Aşadar, $\dfrac{A_{MCPN}}{A_{ABC}} = \dfrac{5}{12}$.

PROBLEMA 4. În triunghiul ABC, fie M mijlocul lui $[BC]$ şi P un punct pe BC, $P \neq M$. Paralela prin P la AC intersectează drepta AM în E, iar paralela prin P la AB intersectează dreapta AM în F. Să se demonstreze că punctele E şi F sunt simetrice faţă de M.

Barem de corectare.

(1p) Fie $FD \parallel AC,\ D \in BC$.

(1p) Deoarece $PF \parallel AB$, rezultă că $\dfrac{MP}{MB} = \dfrac{MF}{MA}$,

(1p) iar din $FD \parallel AC$ rezultă că $\dfrac{MD}{MC} = \dfrac{MF}{MA}$

(1p) de unde, $MP = MD$.

(2p) Deoarece $\Delta PME \equiv \Delta DMF$, obţinem $FM = ME$,

(1p) adică, punctele E şi F sunt simetrice faţă de M.

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 5. 03. 2016
BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII – a

PROBLEMA 1. Să se arate că, dacă inversul sumei a trei numere reale nenule, este egal cu suma inverselor lor, atunci cel puţin două dintre numere au acelaşi modul (se presupune că suma celor trei numere este nenulă).

Barem de corectare.

(1p) Din $\dfrac{1}{a+b+c}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$, obţinem succesiv:

(1p) $\dfrac{1}{a+b+c}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

(1p) $\dfrac{-(b+c)}{a(a+b+c)}=\dfrac{b+c}{b\cdot c}$

(1p) $(b+c)(a^2+ab+ac+bc)=0$

(2p) $(b+c)(a+b)(a+c)=0$

(1p) de unde, $|a|=|b|$ sau $|b|=|c|$ sau $|a|=|c|$.

PROBLEMA 2. Dacă $x, y>0$ sunt două numere reale care verifică relaţia

$$2\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(x+1)(y+4)},$$

calculaţi media geometrică a numerelor x şi y.

Barem de corectare. Avem:

(2p) $2\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(x+1)(y+4)} \Leftrightarrow 4x+y+4\sqrt{xy}=(x+1)(y+4)$

(2p) $\Leftrightarrow xy+4-4\sqrt{xy}=0$

(2p) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{xy}-2\right)^2=0$

(1p) $\Leftrightarrow \sqrt{xy}=2.$

PROBLEMA 3. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu $AB = 12$. Fie $AC \cap BD = \{O\}$, M mijlocul segmentului $[BC]$ şi P mijlocul segmentului $[AB]$. Dacă cosinusul unghiului diedru format de planele (VBC) şi (ABC) este egal cu $\frac{3}{4}$, să se determine:

a) distanţa de la punctul P la planul (VBC);

b) distanţa de la punctul O la planul (VPM);

c) tangenta unghiului format de planele (VAC) şi (VBC).

Barem de corectare. Notăm cu α, măsura unghiului diedru format de planele (VBC) şi (ABC).

(1*p*) *a*) Deoarece $\alpha = m(\widehat{VMO})$, şi $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, se obţine $VM = 8$ şi $VO = 2\sqrt{7}$.

(2*p*) Cum $PO \parallel BC$ rezultă că $PO \parallel (VBC)$, de unde $d(P;(VBC)) = d(O;(VBC)) = \frac{3\sqrt{7}}{2}$.

(1*p*) *b*) Dacă $OB \cap PM = \{E\}$, atunci $OE = 3\sqrt{2}$, $VE = \sqrt{46}$

(1*p*) şi $d(O;(VPM)) = d(O;VE) = \frac{6\sqrt{161}}{23}$.

(1*p*) *c*) Dacă $S \in (VC)$, astfel încât $OS \perp VC$, atunci măsura unghiului diedru format de planele (VAC) şi (VBC) este $\beta = m(\widehat{BSO})$.

(1*p*) Din $OB = 6\sqrt{2}$ şi $OS = \frac{6\sqrt{14}}{5}$ se obţine $\operatorname{tg}\beta = \frac{OB}{OS} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$.

PROBLEMA 4. Pe semidreptele $(OA$, $(OB$ şi $(OC$, perpendiculare două câte două, se consideră punctele A', B' şi C', astfel încât $A' \in (OA)$, $B' \in (OB)$ şi $C' \in (OC)$. Ştiind că patrulaterele $A'B'BA$ şi $B'C'CB$ sunt inscriptibile, să se arate că:

a) $A'C'CA$ este patrulater inscriptibil;

b) Dacă $OH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$, atunci H este ortocentrul triunghiului ABC;

c) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$, atunci $OG \perp (ABC)$.

Barem de corectare.

(2*p*) *a*) Deoarece patrulaterul $A'B'BA$ este inscriptibil, rezultă că $m\left(\widehat{OA'B'}\right) = m\left(\widehat{OBA}\right)$, de unde obţinem că $\Delta OA'B' \sim \Delta OBA$. Deci $OA' \cdot OA = OB' \cdot OB$.
Analog, se obţine $OB' \cdot OB = OC' \cdot OC$.

(1*p*) Aşadar, $OA' \cdot OA = OC' \cdot OC \Rightarrow \Delta OA'C' \sim \Delta OCA \Rightarrow m\left(\widehat{OA'C'}\right) = m\left(\widehat{OCA}\right)$, adică patrulaterul $A'C'CA$ este inscriptibil.

(2*p*) *b*) Deoarece $BC \perp OH$ şi $BC \perp OA$ rezultă că $BC \perp (AOH)$, adică $BC \perp AH$. Analog, se obţine $AB \perp CH$, adică H este ortocentrul triunghiului ABC.

(1*p*) *c*) Fie H ca la punctul *b*), $AH \cap BC = \{D\}$ şi $OD \cap B'C' = \{D'\}$. În triunghiul dreptunghic OBC, $m\left(\widehat{BOD}\right) = m\left(\widehat{OCB}\right)$. Cum $BCC'B'$ este inscriptibil, $m\left(\widehat{BCO}\right) = m\left(\widehat{OB'D'}\right)$. Deci $B'D' = OD'$. Analog se obţine $OD' = D'C'$, de unde $B'D' = D'C$, adică $A'D'$ este mediană în $\Delta A'B'C'$.

(1*p*) OH intersectează mediana $A'D'$ a triunghiului $A'B'C'$. Analog se arată că OH mai intersectează şi o altă mediană a triunghiului $A'B'C'$, de unde rezultă că $G \in (OH)$.

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.