# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
## Etapa locală - 14. 02. 2015
## BAREM DE CORECTARE - Clasa a V – a

**PROBLEMA 1.**

(2$p$) a) Dragoş a rezolvat corect 19 exerciţii;

(2$p$) b) Dragoş a rezolvat greşit 11 exerciţii;

(2$p$) c) Pentru a obţine 120 de puncte, Dragoş ar fi trebuit să rezolve corect încă 2 exerciţii;

(1$p$) d) Punctajul maxim care se putea obţine este $10 \times 30 = 300$ (puncte).

**PROBLEMA 2.**

(1$p$) a) $x = 2x - x = (2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2014} + 2^{2015}) - (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2014}) = 2^{2015} - 1$;

(1$p$) b) Avem $y = 31^{403} - 1$

(1$p$) şi $x = 32^{403} - 1$

(1$p$) deci $x > y$;

(1$p$) c) Deoarece $x$ este de forma $2^{4k+3} - 1$ ($k \in \mathbb{N}$), ultima cifră a lui $x$ este $8 - 1 = 7$

(1$p$) Ultima cifră a lui $y$ este $1 - 1 = 0$

(1$p$) Deci, ultima cifră a lui $x + y$ este 7

**PROBLEMA 3.**

(1$p$) Observăm că $b > a > 0$

(2$p$) Relaţia din enunţ este echivalentă cu: $10b - 10a + 17\,(b - a) = c^3$

(1$p$) De unde avem: $27\,(b - a) = c^3 \Rightarrow b - a$ este cub perfect

(2$p$) Dar, $b - a < 9 \Rightarrow b - a \in \{1, 8\} \Rightarrow c^3 \in \{3^3, 6^3\}$

(1$p$) Astfel, $\overline{abc} \in \{123, 453, 563, 673, 783, 893, 196\}$ , adică sunt 7 numere.

**PROBLEMA 4.**

(2$p$) Se observă că

| $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | $T_5$ | $T_6$ | $T_7$ | $T_8$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2\cdot 1-1$ | $2\cdot 2$ | $2\cdot 3-1$ | $2\cdot 4$ | $2\cdot 5-1$ | $2\cdot 6$ | $2\cdot 7-1$ | $2\cdot 8$ | ... |

adică, termenii şirului sunt de forma:

- dacă $n$ este impar, atunci $T_n = 2n-1$
- dacă $n$ este par, atunci $T_n = 2n$

(2$p$) a) Următorii 2 termeni ai şirului sunt: 21 şi 24

(1$p$) b) Termenul al 2015-lea este $T_{2015} = 2\cdot 2015 - 1 = 4029$

(2$p$) c) Numărul 80 este termen al şirului, $T_{40} = 2\cdot 40 = 80$, iar suma cerută este:

$$S = 1+4+5+8+\cdots+77+80 = (1+5+9+\cdots+77)+(4+8+\cdots+80) =$$

$$= 78\cdot 10 + 4\,(1+2+3+\cdots+20) = 780 + 2\cdot 20\cdot 21 = 1620$$

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
## Etapa locală - 14. 02. 2015
## BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI – a

**PROBLEMA 1.**

(2$p$) a) $2015 \cdot 2015 - 2015 - 2015 + 1 = 2014 \cdot 2014$

(2$p$) Soluţia este $x = 2015$

(1$p$) b) Avem $1 + \frac{1}{500} > \frac{4}{501}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{499} > \frac{4}{501}$, ..., $\frac{1}{250} + \frac{1}{251} > \frac{4}{501}$

(1$p$) de unde, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{499} + \frac{1}{500} > 250 \cdot \frac{4}{501} = \frac{1000}{501}$

(1$p$) Deoarece $\frac{1000}{501} > \frac{13}{7}$, obţinem inegalitatea cerută.

**PROBLEMA 2.**

(3$p$) Se arată că $(3n + 7, 2n + 5) = 1$

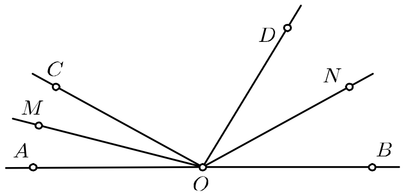
(1$p$) şi $(3n + 7, n + 2) = 1$

(1$p$) Utilizarea formulei $x \cdot y = (x, y) \cdot [x, y]$, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^*$

(1$p$) Astfel, $[a, b] = a \cdot b$ şi $[a, c] = a \cdot c$

(1$p$) de unde, $[a, b] + [a, c] = a \cdot b + a \cdot c = (3n + 7)^2$

**PROBLEMA 3.**




(1p) a) Avem $\mathrm{m}\left(\widehat{MOC}\right)+\mathrm{m}\left(\widehat{COD}\right)=105°$, $\mathrm{m}\left(\widehat{COD}\right)+\mathrm{m}\left(\widehat{DON}\right)=120°$

(1p) şi $\mathrm{m}\left(\widehat{AOC}\right)+\mathrm{m}\left(\widehat{COD}\right)+\mathrm{m}\left(\widehat{DOB}\right)=180°$

(2p) Dacă notăm: $\mathrm{m}\left(\widehat{AOM}\right)=\mathrm{m}\left(\widehat{MOC}\right)=a$, $\mathrm{m}\left(\widehat{BON}\right)=\mathrm{m}\left(\widehat{DON}\right)=c$ şi $\mathrm{m}\left(\widehat{COD}\right)=b$ avem: $a+b=105°$, $b+c=120°$ şi $2a+b+2c=180° \Rightarrow a=15°$, $b=90°$ şi $c=30°$

(1p) b) Suma măsurilor celor 13 unghiuri cu interioarele disjuncte este egală cu $90°$

(1p) Presupunem că cele 13 măsuri sunt numere naturale nenule diferite. Astfel, cea mai mică valoare a sumei măsurilor celor 13 unghiuri ar fi $1°+2°+3°+\cdots+13°=\dfrac{13\cdot 14°}{2}=91°$

(1p) Contradicţie cu ipoteza. Deci, cel puţin două unghiuri au măsurile egale.

**PROBLEMA 4.**

(1p) a) $A_{1000}A_{2015}=A_{1000}A_{1001}+A_{1001}A_{1002}+...+A_{2014}A_{2015}$

(1p) $A_{1000}A_{2015}=1001\text{ cm}+1002\text{ cm}+...+2015\text{ cm}$

(2p) $A_{1000}A_{2015}=1530\,620\text{ cm}$

(1p) b) Considerăm cele 5 segmente cu un capăt în punctul $A$. Conform principiului cutiei, există printre acestea măcar trei de aceeaşi culoare.

(1p) Presupunem, de exemplu, că segmentele $AB, AC$ şi $AD$ sunt toate trei de aceeaşi culoare, şi anume, violet.

Dacă o latură a triunghiului $BCD$ este violet, ea completează cu două dintre segmentele anterioare un triunghi violet.

(1p) În caz contrar, triunghiul $BCD$ este portocaliu şi demonstraţia este completă.

---

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
## Etapa locală - 14. 02. 2015
## BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII – a

**PROBLEMA 1.**

(3p) a) Ultima cifră a numărului $2015^n + (-1)^{n+1} \cdot 2$ este $\begin{cases} 3, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ 7, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$

(1p) Deci $2015^n + (-1)^{n+1} \cdot 2$ nu este pătrat perfect, de unde $A \notin \mathbb{Q}$

(2p) b) Avem: $\sqrt{x(y+z)} \leqslant \dfrac{x+(y+z)}{2}$, $\sqrt{y(x+z)} \leqslant \dfrac{y+(x+z)}{2}$, $\sqrt{z(x+y)} \leqslant \dfrac{z+(x+y)}{2}$

(1p) Deci: $\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(x+z)} + \sqrt{z(x+y)} \leqslant \dfrac{x+(y+z)}{2} + \dfrac{y+(x+z)}{2} + \dfrac{z+(x+y)}{2} = \dfrac{3(x+y+z)}{2} = \dfrac{3 \cdot 1344}{2} = 2016$

**PROBLEMA 2.**

(2p) a) Se arată că $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

(1p) b) Deoarece numărul $a^2 + a = a(a+1)$ este par, rezultă că şi numărul $p^{2^b} + 2$ este par. Deci $p = 2$, iar relaţia din enunţ devine: $a^2 + a - 2 = 2^{2^b} \Longleftrightarrow (a-1)(a+2) = 2^{2^b}$

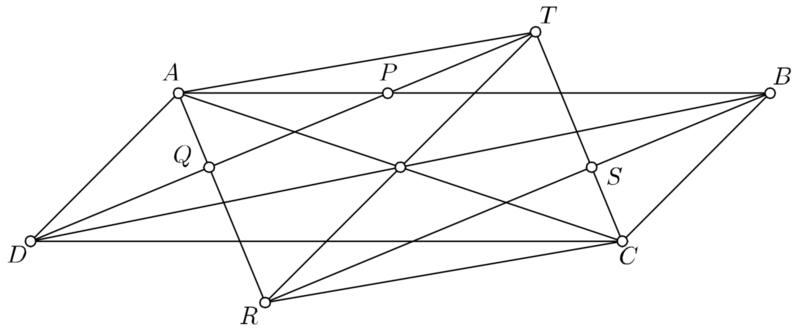
(1p) Deoarece membrul drept este par, iar numerele $a-1$ şi $a+2$ au parităţi diferite, singurele posibilităţi sunt: $\begin{cases} a-1 = 1 \\ a+2 = 2^{2^b} \end{cases}$ sau $\begin{cases} a-1 = 2^{2^b} \\ a+2 = 1 \end{cases}$

(1p) Pentru $a+2 = 1$, nu avem soluţii

(2p) Pentru $\begin{cases} a-1 = 1 \\ a+2 = 2^{2^b} \end{cases}$ se obţine $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

Soluţia $(p, a, b) = (2, 2, 1)$

**PROBLEMA 3.**




(1$p$) a) $\frac{1}{2}\mathrm{m}\left(\widehat{A}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{m}\left(\widehat{D}\right)=90^\circ$, rezultă $\mathrm{m}\left(\widehat{TQR}\right)=90^\circ$

(1$p$) se demonstrează că patrulaterul $RSTQ$ are trei unghiuri drepte, deci este dreptunghi

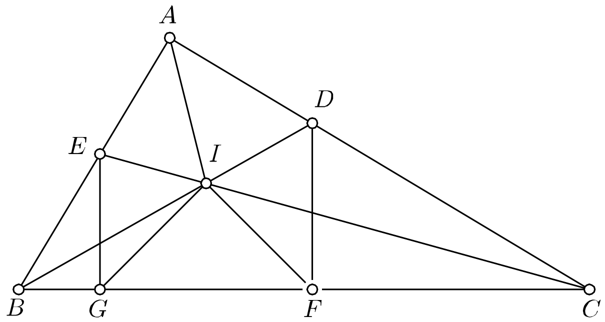
(1$p$) b) $\Delta AQD \sim \Delta ARB \Rightarrow \frac{A_{AQD}}{A_{ARB}}=\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\frac{1}{n^2}$

(1$p$) $\Delta AQD \equiv \Delta AQP \Rightarrow A_{ADP}=2\cdot A_{AQD} \Rightarrow \frac{A_{ADP}}{A_{ARB}}=\frac{2}{n^2}$

(2$p$) c) Se demonstrează că $ATCR$ este paralelogram, de unde rezultă că $[RT]$ şi $[AC]$ au acelaşi mijloc

(1$p$) În paralelogramul $ABCD$, diagonalele $AC$ şi $BD$ au acelaşi mijloc, de unde rezultă concurenţa dreptelor $RT,\ AC$ şi $DB$

**PROBLEMA 4.**




(1$p$) Deoarece $[BI$ şi $[BI$ sunt bisectoare în $\Delta ABC \Rightarrow [AI$ este bisectoare în $\Delta ABC$
$\Rightarrow \mathrm{m}(\widehat{BAI})=45^\circ$

(2$p$) Deoarece $[BD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$, rezultă că $DA=DF$ şi $AB=BF$

(2$p$) $\Delta AIB \equiv \Delta FIB \Rightarrow \widehat{BAI}\equiv\widehat{BFI} \Rightarrow \mathrm{m}(\widehat{BFI})=45^\circ$

(2$p$) Analog se arată că $\mathrm{m}(\widehat{FGI})=45^\circ$ şi din $\Delta FIG$ avem $\mathrm{m}(\widehat{FIG})=90^\circ$

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
## Etapa locală - 14. 02. 2015
## BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII – a

**PROBLEMA 1.**

(2p) a) $E = 3x^2 + 4\sqrt{6}x + 8 - y^2 = \left(x\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\right)^2 - y^2$;

(2p) Finalizare, $E = \left(x\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - y\right)\left(x\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + y\right)$.

(1p) b) Fracţiile pot lua doar valorile 1 sau $-1$

(1p) Minimul expresiei este $-3$

(1p) Maximul expresiei este 3

**PROBLEMA 2.**

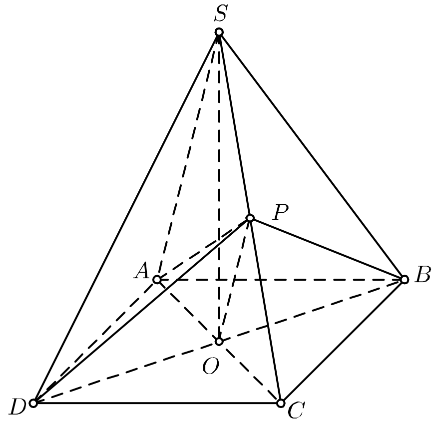
(2p) $\sqrt{\frac{a+5}{a+12}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + 5 = kx^2$ şi $a + 12 = ky^2$ cu $x$ şi $y$ prime între ele şi $k \in \mathbb{N}$.

(1p) Avem $k(y^2 - x^2) = 7 \Rightarrow k(y - x)(y + x) = 7$ de unde, singura soluţie este $k = 1, y = 4$ şi $x = 3 \Rightarrow a = 4$.

(3p) Analog se găseşte că $b = 22$.

(1p) Ultima cifră a numărului $a^{2015} + b^{2015}$ este 2, de unde rezultă cerinţa

**PROBLEMA 3.**




(2$p$) a) $SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp BD,\ BD \perp AC \Rightarrow BD \perp (SOC) \Rightarrow BD \perp SC \Rightarrow m\left(\widehat{BD, SC}\right) = 90°$

(1$p$) b) Triunghiurile $\Delta SAC$ şi $\Delta OPC$ sunt echilaterale

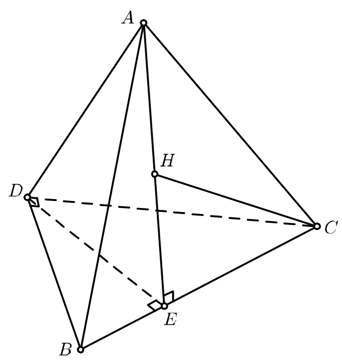
(1$p$) $d(A, (BPD)) = d(C, (BPD)) = d(C, OP) = 3\sqrt{6}$ cm

(3$p$) c) $OP$ este linie mijlocie în $\Delta SAC \Rightarrow OP \parallel AS \Rightarrow OP \parallel (ADS)$;

$OP \subset (BPD) \Rightarrow OP \parallel (ADS) \cap (BPD)$;

$BD \perp OP \Rightarrow BD \perp (ADS) \cap (BPD) \Rightarrow d(B, (ADS) \cap (BPD)) = BD = 12\sqrt{2}$cm

**PROBLEMA 4.**




(1$p$) $\Delta BCD$ este dreptunghic în $D$

(1$p$) Deoarece $DE \perp BC$, din teorema înălţimii, rezultă că $DE^2 = BE \cdot CE$

(2$p$) $\Delta CEH \sim \Delta AEB$

(2$p$) Rezultă $\dfrac{CE}{AE} = \dfrac{HE}{BE} \Rightarrow BE \cdot CE = HE \cdot AE$

(1$p$) Deci, $HE \cdot AE = DE^2$

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.