OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a XII-a

Barem de corectare

Problema 1

Fie (G,·) un grup și H o submulțime nevidă a sa astfel încât H≠G. Să se arate că H este subgrup dacă și numai dacă $\forall\, x \in H$, $\forall\, y \in G \setminus H \Rightarrow xy \in G \setminus H$.

Barem :

” $\Rightarrow$ ” Fie $x \in H$ și $y \in G \setminus H$

Presupunem că $xy \in H$ (1). Deoarece H subgrup avem $x^{-1} \in H$ (2). **(1p)**

Din (1) și (2) și H parte stabilă rezultă $x^{-1}xy = y \in H$ contradicție. **(1p)**

Deci presupunerea este falsă, ca urmare $xy \in G \setminus H$. **(1p)**

” $\Leftarrow$ ” Fie e elementul neutru al grupului G

Dacă $e \in G \setminus H$ atunci din ipoteză $\forall\, x \in H$ avem $x = xe \in G \setminus H$ contradicție.

Deci $e \in H$. **(1p)**

Fie $x \in H$. Dacă $x^{-1} \in G \setminus H$ atunci $e = xx^{-1} \in G \setminus H$ contradicție.

Deci $\forall\, x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$ **(1p)**

Fie $x, y \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$

Dacă $xy \in G \setminus H$ atunci $x^{-1}xy = y \in G \setminus H$ contradicție.

Deci $xy \in H$. **(1p)**

Ca urmare H subgrup. **(1p)**

Problema 2

1) Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\limits_{x \le t \le x+1} (t^2 - 2t)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că funcția admite primitive pe $\mathbb{R}$;

b) Determinați primitivele funcției f pe $\mathbb{R}$.

Barem :

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, x \le 0 \\ -1 \quad , x \in (0,1) \\ x^2 - 2x, x \ge 1 \end{cases}$ **(2p)**

f este continuă pe $\mathbb{R}$ deci admite primitive. **(1p)**

b) Primitivele funcției *f* sunt de forma $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-x+C_1\,,\, x\le 0\\ -x+C_2 \quad ,\; x\in(0,1)\\ \frac{x^3}{3}-x^2+C_3\,,\, x\ge 1\end{cases}$

(2p)

Folosind continuitatea lui F obținem $C_1=C_2=\frac{1}{3}+C_3$. **(1p)**

Deci $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-x+C\,,\, x\le 0\\ -x+C \quad ,\; x\in(0,1)\\ \frac{x^3}{3}-x^2-\frac{1}{3}+C\,,\, x\ge 1\end{cases}$ unde $C\in\mathbb{R}$ **(1p)**

Problema 3

Calculați $\int_{-\frac{1}{2014}}^{\frac{1}{2014}} x^{2014}\arccos(2014x)dx$.

Barem :

Notăm *t*=2014*x* și obținem $I=\frac{1}{2014^{2015}}J$ unde $J=\int_{-1}^{1} t^{2014}\arccos(t)dt$ **(2p)**

Notăm *t* = -*u* și obținem $J=\int_{-1}^{1} u^{2014}\pi\, du - J$. **(3p)**

$J=\frac{\pi}{2015}$ deci $I=\frac{\pi}{2014^{2015}\cdot 2015}$ **(2p)**

Problema 4

Fie mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix} \,\middle|\, \hat{a},\hat{b}\in Z_5\right\}$ și matricea $A=\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{3}\\ \hat{3} & \hat{2}\end{pmatrix}$. Rezolvați în mulțimea *M* ecuația $X^6=A$.

Barem :

Fie X=$\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix}$.

Deoarece det(A)=$\hat{0}$ obținem det(X)=$\hat{0}$, adică $\hat{a}^2=\hat{b}^2$. **(1p)**

$\hat{a}\in Z_5 \Rightarrow \hat{a}^2,\hat{b}^2\in\{\hat{0},\hat{1},\hat{4}\}$ **(1p)**

$\hat{a}^2=\hat{b}^2=\hat{0} \Rightarrow \hat{a}=\hat{b}=\hat{0}$ imposibil **(1p)**

$\hat{a}^2 = \hat{b}^2 = \hat{1} \Rightarrow (\hat{a}, \hat{b}) \in \{(\hat{1}, \hat{1}), (\hat{1}, \hat{4}), (\hat{4}, \hat{1}), (\hat{4}, \hat{4})\}$ **(1p)**

Soluțiile care convin sunt $X_1 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{4} \\ \hat{4} & \hat{1} \end{pmatrix}$ si $X_2 = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{4} \end{pmatrix}$ **(1p)**

$\hat{a}^2 = \hat{b}^2 = \hat{4} \Rightarrow (\hat{a}, \hat{b}) \in \{(\hat{2}, \hat{2}), (\hat{2}, \hat{3}), (\hat{3}, \hat{2}), (\hat{3}, \hat{3})\}$ **(1p)**

Nu se mai obtin solutii**.** **(1p)**

Notă: a) Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte.
b) Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

Str. Mihai Eminescu nr. 11, 410019, Oradea
Tel: +40 (0) 259 41 64 54,
Tel./fax: +40 (0) 359 43 62 07,
Fax: +40 (0) 259 41 80 16,
+40 (0) 259 47 02 22,
Web: www.isjbihor.ro
E-mail: isjbihor@yahoo.com