MINISTERUL EDUCAȚIEI

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ 1902-2023

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a IX-a – soluții

Problema 1. Fie triunghiul ABC.

a) Arătați că bisectoarea interioară a unghiului A și bisectoarele exterioare ale unghiurilor B și C se intersectează într-un punct I_A.

b) Notăm cu M, N și P proiecțiile punctului I_A pe dreptele AC, BC respectiv AB. Arătați că, dacă $\overrightarrow{I_AM} + \overrightarrow{I_AP} = \overrightarrow{I_AN}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Gazeta Matematică

Soluție. a) Dacă I_A este punctul de intersecție al bisectoarelor exterioare ale unghiurilor B și C, atunci I_A se află în interiorul unghiului A și este egal depărtat de laturile AB și BC respectiv de BC și AC. Prin tranzitivitate, I_A este egal depărtat de laturile AB și AC ale unghiului A, este interior unghiului A, deci se află pe bisectoarea interioară a unghiului A.

.... **2p**

b) Din condiția $\overrightarrow{I_AM} + \overrightarrow{I_AP} = \overrightarrow{I_AN}$ deducem că patrulaterul I_AMNP este paralelogram. De asemenea din punctul a) avem că $I_AM = I_AN = I_AP$, deci I_AMNP este romb iar triunghiurile I_ANP și I_AMN sunt echilaterale.

.... **2p**

Astfel, patrulaterul inscriptibil API_AM are $\measuredangle PI_AM = 120°$, deci $\measuredangle A = 60°$.

.... **1p**

Pe de altă parte, B este unghi exterior patrulaterului inscriptibil I_APBN deci $\measuredangle B = \measuredangle PI_AN = 60°$ și C este unghi exterior patrulaterului inscriptibil I_AMCN deci $\measuredangle C = \measuredangle MI_AN = 60°$. Astfel, triunghiul ABC are toate unghiurile de $60°$, deci este echilateral.

.... **2p**

Problema 2. a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$[x]^2 - x = -0,99.$$

b) Arătați că, pentru orice $a \leq -1$, ecuația $[x]^2 - x = a$ **nu** are soluții reale.

Soluție.

a) Ecuația se scrie echivalent $[x]^2 - [x] = \{x\} - 0,99$, prin urmare $\{x\} - 0,99 \in \mathbb{Z}$.

.... **1p**

Cum $0 < \{x\} < 1$ deducem că $-0,99 < \{x\} - 0,99 < 0,01$ de unde $\{x\} - 0,99 = 0$ deci $\{x\} = 0,99$ **1p**

De asemenea, din $[x]^2 - [x] = 0$ deducem că $[x] = 0$ sau $[x] = 1$ deci $x \in \{0,99;\ 1,99\}$.

.... **1p**

b) Ecuația se scrie echivalent $[x]^2 - [x] = \{x\} + a$. Presupunem, prin absurd, că există $a \leq -1$ pentru care ecuația are soluții reale. Atunci, cum $\{x\} < 1$, avem $[x]^2 - [x] = \{x\} + a < 0$.

.... **2p**

Notând $[x] = y \in \mathbb{Z}$, avem $y(y-1) < 0$, deci $y \in (0,1)$, ceea ce este absurd.

.... **2p**

Problema 3. Dacă x, y, z sunt numere pozitive cu $x+y+z=1$, arătați că

a)
$$1-\frac{x^2-yz}{x^2+x}=\frac{(1-y)(1-z)}{x^2+x};$$

b)
$$\frac{x^2-yz}{x^2+x}+\frac{y^2-zx}{y^2+y}+\frac{z^2-xy}{z^2+z}\le 0.$$

Soluție. a) $1-\dfrac{x^2-yz}{x^2+x}=\dfrac{x+yz}{x^2+x}=\dfrac{1-y-z+yz}{x^2+x}=\dfrac{(1-y)(1-z)}{x^2+x}$.

.... **2p**

b) Folosind a), inegalitatea se rescrie

$$\frac{(1-y)(1-z)}{x(x+1)}+\frac{(1-z)(1-x)}{y(y+1)}+\frac{(1-x)(1-y)}{z(z+1)}\ge 3$$

adică

$$\frac{(x+z)(x+y)}{x[(x+z)+(x+y)]}+\frac{(y+z)(y+x)}{y[(y+z)+(y+x)]}+\frac{(z+y)(z+x)}{z[(z+y)+(z+x)]}\ge 3.$$

.... **2p**

Aplicând inegalitatea dintre media aritmetică și media armonică deducem

$$\frac{(x+z)(x+y)}{x[(x+z)+(x+y)]}+\frac{(y+z)(y+x)}{y[(y+z)+(y+x)]}+\frac{(z+y)(z+x)}{z[(z+y)+(z+x)]}\ge$$
$$\ge\frac{9}{\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}+\frac{y}{y+x}+\frac{z}{z+y}+\frac{z}{z+x}}=\frac{9}{1+1+1}=3.$$

.... **3p**

Variantă soluție b). Folosind a), inegalitatea se rescrie

$$(1-x)(1-y)(1-z)\left(\frac{1}{x-x^3}+\frac{1}{y-y^3}+\frac{1}{z-z^3}\right)\ge 3.$$

.... **2p**

Aplicând inegalitatea dintre media aritmetică și media armonică avem

$$\frac{1}{x-x^3}+\frac{1}{y-y^3}+\frac{1}{z-z^3}\ge\frac{9}{(x+y+z)-(x^3+y^3+z^3)}=\frac{9}{1-(x^3+y^3+z^3)}=$$
$$=\frac{9}{(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)}=\frac{9}{3(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{3}{(1-x)(1-y)(1-z)}.$$

.... **3p**

și inegalitatea este demonstrată.

Problema 4. Determinați funcțiile strict crescătoare $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ care au proprietatea:

numărul $f(x) \cdot f(y)$ divide numărul $(1 + 2x) \cdot f(y) + (1 + 2y) \cdot f(x)$,

pentru orice numere naturale x și y.

Soluție. a) Pentru $x = y = 0$ deducem $f^2(0) \mid 2f(0)$, de unde $f(0) \in \{0, 1, 2\}$ **1p**

Dacă $f(0) = 0$, pentru $y = 0$ avem $0 \mid f(x), \forall x \in \mathbb{N}$, deci $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{N}$, ceea ce contrazice faptul că f este strict crescătoare. **1p**

Dacă $f(0) = 1$, pentru $y = 0$, avem $f(x) \mid (2x + 1) + f(x), \forall x \in \mathbb{N}$, prin urmare $f(x) \mid 2x + 1, \forall x \in \mathbb{N}$. **1p**

Presupunând că $f(k) = 2k + 1$, pentru un k natural oarecare, avem $f(k + 1) \mid 2k + 3$, și cum $f(k + 1) > f(k) = 2k + 1$ obținem $f(k + 1) = 2k + 3$, adică $f(x) = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{N}$.
.... **1p**

Dacă $f(0) = 2$, pentru $y = 0$, avem $2f(x) \mid 2(2x + 1) + f(x), \forall x \in \mathbb{N}$, prin urmare $\dfrac{2(2x + 1) + f(x)}{2f(x)} = \dfrac{2x + 1}{f(x)} + \dfrac{1}{2} \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}$. **1p**

Presupunând că $f(k) = 4k + 2$, pentru un k natural oarecare, avem $\dfrac{2k + 3}{f(k + 1)} + \dfrac{1}{2} \in \mathbb{N}$ și cum $f(k+1) > f(k) = 4k+2$ obținem $0 < \dfrac{2k + 3}{f(k + 1)} + \dfrac{1}{2} < \dfrac{2k + 3}{4k + 2} + \dfrac{1}{2} \leq 2$. Astfel $\dfrac{2k + 3}{f(k + 1)} + \dfrac{1}{2} = 1$, prin urmare $f(k + 1) = 4k + 6$, adică $f(x) = 4x + 2, \forall x \in \mathbb{N}$. **1p**

Ambele funcții verifică proprietatea din enunț. **1p**

Notă. Pentru omiterea cazului $f(0) = 0$ se scade un punct.