Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a VII-a – soluții

Problema 1. Determinați toate perechile (x, y) de numere reale care verifică relația

$$3 \cdot \left\{\frac{3x+2}{3}\right\} + 4 \cdot \left[\frac{4y+3}{4}\right] = 4 \cdot \left\{\frac{4y+3}{4}\right\} + 3 \cdot \left[\frac{3x+2}{3}\right] = 18.$$

Notațiile $\{a\}$ și $[a]$ reprezintă partea fracționară, respectiv partea întreagă a numărului real a.

Gazeta Matematică

Soluție. Deoarece $0 \leqslant \{a\} < 1$ și $[b]$ este număr întreg, egalitatea $3\{a\} + 4[b] = 18$ are loc doar în cazul $\{a\} = \frac{2}{3}$ și $[b] = 4$ **2p**

Deoarece $0 \leqslant \{c\} < 1$ și $[d]$ este număr întreg, egalitatea $4\{c\} + 3[d] = 18$ are loc doar în cazurile $\{c\} = 0$, $[d] = 6$ (I), sau $\{c\} = \frac{3}{4}$, $[d] = 5$ (II) **3p**

În cazul (I) obținem $\frac{3x+2}{3} = 6 + \frac{2}{3}$ și $\frac{4y+3}{4} = 4$, deci $x = 6$, $y = \frac{13}{4}$. În cazul (II) obținem $\frac{3x+2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$ și $\frac{4y+3}{4} = 4 + \frac{3}{4}$, deci $x = 5$, $y = 4$. Perechile sunt $(6, \frac{13}{4})$ și $(5, 4)$ **2p**

Problema 2. Determinați numerele întregi a, b, c, d care îndeplinesc simultan condițiile $a + b + c = 2d$ și $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = d^2$.

Soluție. Dacă $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$, atunci $d \geqslant 0$. Avem $d^2 = \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc} \leqslant a + a + b \leqslant 2a + 2b + 2c \leqslant 4d$, cel puțin una dintre inegalități fiind strictă, de unde $d \in \{0, 1, 2, 3\}$ **2p**

Cazul I: $d = 0$. Atunci $a = b = c = 0$ **1p**

Cazul II: $d = 1$. Atunci $a + b + c = 2$ și $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$, deci $a = b = 1$, $c = 0$ **1p**

Cazul III: $d \in \{2, 3\}$. Pentru $d = 2$ avem posibilitățile $(2,1,1)$, $(2,2,0)$, $(3,1,0)$, $(4,0,0)$, iar pentru $d = 3$ avem posibilitățile $(3,2,1)$, $(3,3,0)$, $(4,2,0)$, $(4,1,1)$, $(5,1,0)$, $(6,0,0)$; niciuna nu convine **1p**

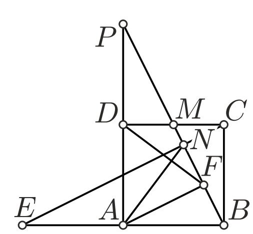
În cazul în care cel puțin unul dintre numere este negativ, atunci toate sunt mai mici sau egale cu 0, iar $-a$, $-b$, $-c$, $-d$ verifică egalitățile din enunț **1p**

Obținem soluțiile $(0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (0,-1,-1), (-1,0,-1), (-1,-1,0)$ ... **1p**

Problema 3. Se consideră un pătrat $ABCD$ și se notează cu M mijlocul laturii CD. Perpendiculara din C pe BM intersectează dreptele BM și AB în punctele N, respectiv E. Dreapta BM intersectează dreapta AD în P, iar mijlocul segmentului BN se notează cu F. Arătați că:

a) triunghiurile CBE și BAP sunt congruente;

b) segmentele AN și DF sunt congruente și perpendiculare.



Soluție. a) Deoarece $CB = BA$ și $\sphericalangle CEB = \sphericalangle BPA$ (au fiecare complement $\sphericalangle EBP$), deducem că triunghiurile dreptunghice $\triangle CBE$ și $\triangle BAP$ sunt congruente. **3p**

b) Notăm cu T intersecția dreptelor EC și AP. DM și AT sunt linii mijlocii în triunghiurile dreptunghice APB și BEC, deci A este mijlocul lui BE. Prin urmare $AF \parallel NE$, de unde $AF \perp BP$ **1p**

FD și AN sunt mediane corespunzătoare ipotenuzelor în triunghiuri dreptunghice, deci $FD = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}BE = AN$ **1p**

$BN = AF$, deoarece sunt înălțimile corespunzătoare ipotenuzelor în triunghiuri congruente, așadar $\triangle ADF \equiv \triangle BAN$. **1p**

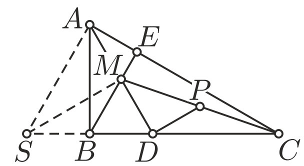
Cum $\sphericalangle FDA + \sphericalangle NAD = \sphericalangle NAB + \sphericalangle NAD = 90^\circ$, avem $AN \perp DF$ **1p**

Problema 4. Fie triunghiul ABC care are $\sphericalangle ABC = 90°$ și $\sphericalangle BCA = 30°$. Fie AD bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, $D \in BC$, și $BE \perp AC$, $E \in AC$. Notăm cu M intersecția dreptelor AD și BE, iar cu P mijlocul lui CM. Arătați că $AC = 4 \cdot DP$.

Soluție. Din teorema unghiului de $30°$ avem $AC = 2AB$ .. **1p**

Deoarece $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACD = 30°$, triunghiul ADC este isoscel, cu $DA = DC$ **1p**

Cum $\sphericalangle ADB = \sphericalangle MBD = 60°$, triunghiul MBD este echilateral. Reiese astfel că $MB = BD = \frac{1}{2}AD$, deci punctul M este mijlocul lui AD **2p**



Notăm cu S simetricul lui D față de B. Atunci triunghiul ADS este echilateral. Reiese $DS = AD = CD$, deci DP este linie mijlocie în triunghiul CSM. Cum $AB = SM$ (mediane în triunghiul echilateral ADS), rezultă $DP = \frac{1}{2}MS = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}AC$ **3p**