MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2023

CLASA a XI-a – soluţii

Problema 1. *Determinaţi funcţiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $f(1)=e$ şi $f(x+y)=e^{3xy}\cdot f(x)\cdot f(y)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.*

Gazeta Matematică

Soluţie. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie care satisface condiţiile din enunţ. Dacă există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(a)=0$ atunci $f(x)=f(a+(x-a))=e^{3a(x-a)}f(a)f(x-a)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Contradicţie. Apoi $f(x)=e^{3x^2/4}f^2(x/2)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Rezultă $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. **1p**

Prin logaritmarea relaţiei din enunt, obţinem $\ln f(x+y)=3xy+\ln f(x)+\ln f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$, de unde $\ln f(x+y)-\dfrac{3(x+y)^2}{2}=\left[\ln f(x)-\dfrac{3x^2}{2}\right]+\left[\ln f(y)-\dfrac{3y^2}{2}\right],\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. **2p**

Definim funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\ln f(x)-\dfrac{3x^2}{2}$. Din relaţia anterioară rezultă că funcţia g satisface ecuaţia funcţională Cauchy $g(x+y)=g(x)+g(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. **1p**

Cum f este continuă, g este continuă. Rezultă $g(x)=g(1)x=\left(\ln f(1)-\dfrac{3}{2}\right)x=-\dfrac{x}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}$
. . . . **2p**

Atunci $\ln f(x)-\dfrac{3x^2}{2}=-\dfrac{x}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}$, de unde obţinem $f(x)=e^{\frac{x(3x-1)}{2}},\ \forall x\in\mathbb{R}$. Reciproc, aceasta funcţie satisface condiţiile din enunţ **1p**

Soluţie alternativă. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie care satisface condiţiile din enunţ. Atunci $f(1)=f(1)f(0)$, de unde $f(0)=1$ **1p**

Pentru orice $n\in\mathbb{N}$, avem $f(n)=e^{\frac{n(3n-1)}{2}}$ (demonstraţie prin inducţie) **1p**

Pentru $n\in\mathbb{N}$, avem $1=f(0)=e^{-3n^2}f(n)f(-n)$, de unde obţinem $f(-n)=e^{\frac{3(-n)^2-(-n)}{2}}$.
Deducem $f(n)=e^{\frac{n(3n-1)}{2}},\ \forall n\in\mathbb{Z}$ **1p**

Pentru orice $x\in\mathbb{R}$ şi orice $n\in\mathbb{N}$, avem $f(nx)=e^{\frac{3n(n-1)x^2}{2}}f^n(x)$ (demonstraţie prin inducţie după $n\in\mathbb{N}$, pentru $x\in\mathbb{R}$, arbitrar) **1p**

Fie $r=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}$, cu $m\in\mathbb{Z}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$. Atunci $e^{\frac{m(3m-1)}{2}}=f(m)=f\left(n\cdot\dfrac{m}{n}\right)=e^{\frac{3n(n-1)}{2}\cdot\frac{m^2}{n^2}}f^n\left(\dfrac{m}{n}\right)$.
Cum $f(x)=e^{3x^2/4}f^2(x/2)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, obţinem

$$f(r)=f\left(\frac{m}{n}\right)=e^{\frac{1}{n}\left(\frac{m(3m-1)}{2}-\frac{3m^2(n-1)}{2n}\right)}=e^{\frac{r(3r-1)}{2}}$$

. . . . **2p**

Fie $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Există un şir $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere raţionale cu $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x$. Din continuitatea funcţiei f, rezultă $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(r_n)=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{r_n(3r_n-1)}{2}}=e^{\frac{x(3x-1)}{2}}$.

Prin urmare, dacă funcţia f satisface ipoteza, atunci $f(x)=e^{\frac{x(3x-1)}{2}},\ \forall x\in\mathbb{R}$. Reciproc, aceasta funcţie satisface condiţiile din enunţ **1p**

Problema 2. *Fie matricele inversabile $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, astfel ca matricea $A + B^{-1}$ să fie inversabilă, cu $\left(A + B^{-1}\right)^{-1} = A^{-1} + B$. Arătaţi că $\det(AB) = 1$. Rămâne adevărată concluzia în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?*

Soluţie. Din ipoteză, obţinem $I_n = \left(A + B^{-1}\right)\left(A^{-1} + B\right) = 2I_n + AB + B^{-1}A^{-1}$. Rezultă $AB + (AB)^{-1} + I_n = O_n$ **2p**
Notăm $C = AB$. Avem $C + C^{-1} + I_n = O_n$, sau $C^2 + C + I_n = O_n$ **1p**
Înmulţind relaţia de mai sus cu $C - I_n$ obţinem $C^3 - I_n = O_n$, deci $C^3 = I_n$........ **1p**
Atunci $(\det C)^3 = 1$. Cum $\det C \in \mathbb{R}$, găsim $\det C = 1$. Prin urmare, $\det(AB) = 1$ **1p**
Concluzia $\det(AB) = 1$ nu rămâne adevărată în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. De exemplu, alegem matricele inversabile $A = I_2$ şi $B = \varepsilon I_2$, unde $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Avem $\left(A + B^{-1}\right)\left(A^{-1} + B\right) = \left(1 + \varepsilon^2\right)(1 + \varepsilon)I_2 = I_2$, dar $\det(AB) = \varepsilon^2 \neq 1$ **2p**

Problema 3. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$. Presupunem că $f : [a, b] \to [a, b]$ este o funcţie continuă, cu proprietatea că există $c, d \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = a$ şi $f(d) = b$. Arătaţi că funcţia $f \circ f : [a, b] \to [a, b]$ are cel puţin trei puncte fixe. ($x_0 \in D$ se numeşte punct fix al funcţiei $\varphi : D \to D$ dacă $\varphi(x_0) = x_0$.)*

Soluţie. Considerăm funcţiile $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ definite prin $g(x) = f(x) - x$ şi respectiv $h(x) = (f \circ f)(x) - x$, pentru oricare $x \in [a, b]$. Funcţiile f, g şi h sunt continue pe $[a, b]$, deci au proprietatea lui Darboux pe $[a, b]$ **1p**
Distingem două cazuri.

1) $a < c < d < b$.
Avem $g(a) = f(a) - a \geq 0$, $g(c) = a - c < 0$, $g(d) = b - d > 0$ şi $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Atunci există punctele $x_1 \in [a, c)$, $x_2 \in (c, d)$ şi $x_3 \in (d, b]$ astfel încât $g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) = 0$, cu $x_1 < x_2 < x_3$. Rezultă că f are cel puţin trei puncte fixe, deci şi $f \circ f$ are cel puţin trei puncte fixe **3p**

2) $a < d < c < b$.
Din $g(d) = b - d > 0$ şi $g(c) = a - c < 0$ rezultă că există $x_2 \in (d, c)$ astfel încât $g(x_2) = 0$. Atunci $f(x_2) = x_2$, de unde $(f \circ f)(x_2) = x_2$ **1p**
Avem $c \in (x_2, b) = (f(x_2), f(d))$. Atunci există $\alpha \in (d, x_2)$ astfel ca $f(\alpha) = c$. Rezultă $h(\alpha) = f(f(\alpha)) - \alpha = f(c) - \alpha = a - \alpha < 0$. Dar $h(a) = f(f(a)) - a \geq 0$. Deducem că există $x_1 \in [a, \alpha)$ astfel ca $h(x_1) = 0$, deci $(f \circ f)(x_1) = x_1$. Avem $d \in (a, x_2) = (f(c), f(x_2))$. Atunci există $\beta \in (x_2, c)$ astfel ca $f(\beta) = d$. Obţinem $h(\beta) = f(f(\beta)) - \beta = f(d) - \beta = b - \beta > 0$. Apoi $h(b) = f(f(b)) - b \leq 0$. Deducem că există $x_3 \in (\beta, b]$ astfel ca $h(x_3) = 0$, deci $(f \circ f)(x_3) = x_3$. Cum $x_1 < \alpha < x_2 < \beta < x_3$, rezultă că $f \circ f$ are cel puţin trei puncte fixe **2p**

Problema 4. *Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, cu proprietatea că $A^2 = B^2 = O_3$. Demonstraţi că $AB = BA$ implică $AB = O_3$. Arătaţi că implicaţia reciprocă este falsă.*

Soluţie. Presupunem $AB = BA$.
Atunci $(A + B)^2 = 2AB$. Rezultă $(A + B)^3 = 2AB(A + B) = 2A^2B + 2AB^2 = O_3$. **2p**
Apoi, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 = O_3$. Din inegalitatea lui Sylvester pentru ranguri, obţinem $\operatorname{rang}(A + B) + \operatorname{rang}(A - B) \leq 3$. Astfel, $\operatorname{rang}(A + B) \leq 1$ sau $\operatorname{rang}(A - B) \leq 1$ **1p**
Presupunem $\operatorname{rang}(A + B) \leq 1$.
Dacă $\operatorname{rang}(A + B) = 0$, deci $A + B = O_3$, atunci $AB = -A^2 = O_3$ **1p**

Dacă $\text{rang}(A+B) = 1$, atunci există două matrice nenule, $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ şi $D \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$, astfel încât $A+B = CD$. Rezultă $(A+B)^2 = (CD)(CD) = C(DC)D = \text{Tr}(A+B)(A+B)$. Obţinem $O_3 = (A+B)^3 = \text{Tr}(A+B)(A+B)^2$. Dacă $\text{Tr}(A+B) \neq 0$ atunci $(A+B)^2 = O_3$, iar dacă $\text{Tr}(A+B) = 0$ atunci din $(A+B)^2 = \text{Tr}(A+B)(A+B)$ obţinem de asemenea $(A+B)^2 = O_3$.
Rezultă $AB = O_3$ **1p**
Cazul $\text{rang}(A-B) \leq 1$ se tratează analog, pe baza relaţiilor $(A-B)^2 = -2AB$ şi $(A-B)^3 = O_3$.
.... **1p**
Contraexemplu pentru implicaţia reciprocă. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Avem $A^2 = B^2 = AB = O_3$, dar $AB \neq BA$ **1p**