**Olimpiada Naţională de Matematică**

**Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2022**

**CLASA a XII-a – soluţii şi bareme**

**Problema 1.** Fie $e$ elementul neutru al monoidului $(M, \cdot)$ şi $a \in M$ un element inversabil. Arătaţi că:

**a)** Mulţimea $M_a = \{x \in M \mid ax^2a = e\}$ este nevidă;

**b)** Dacă $b \in M_a$ este inversabil, atunci $b^{-1} \in M_a$ dacă şi numai dacă $a^4 = e$;

**c)** Dacă $(M_a, \cdot)$ este monoid, atunci $x^2 = e$, pentru orice $x \in M_a$.

*Gazeta Matematică*

*Soluţie.* Deoarece $a$ este un element inversabil, avem că $M_a = \{x \in M \mid x^2 = (a^{-1})^2\}$.
a) Elementul $a^{-1}$ are proprietatea că $(a^{-1})^2 = (a^{-1})^2$, deci $a^{-1} \in M_a$ şi $M_a \neq \emptyset$. . . . . . . **2p**
b) Fie $b \in M_a$ un element inversabil. Atunci

$$b^{-1} \in M_a \iff (b^{-1})^2 = (a^{-1})^2 \iff (b^2)^{-1} = (a^2)^{-1} \iff$$

$$\iff ((a^2)^{-1})^{-1} = (a^2)^{-1} \iff a^2 = (a^2)^{-1} \iff a^4 = e.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2p**
c) Fie $u \in M_a$ elementul neutru al monoidului $M_a$. Atunci $a^{-2} = u^2 = u \in M_a$, astfel că $a^{-4} = (a^{-2})^2 = a^{-2}$. Rezultă că $a^{-2} = e$ şi $M_a = \{x \in M \mid x^2 = e\}$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **3p**

**Problema 2.** Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $H \neq G$ un subgrup cu proprietatea că $x^2 = y^2$, pentru orice $x, y \in G \setminus H$. Demonstraţi că $(H, \cdot)$ este grup comutativ.

*Soluţie.* Pentru $x \in G \setminus H$ şi $h \in H$ oarecare avem că $h^{-1}x \in G \setminus H$, astfel că $x^2 = (h^{-1}x)^2$, sau, echivalent, $h = xh^{-1}x^{-1}$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **4p**
Atunci, pentru $x \in G \setminus H$ oarecare fixat şi orice $h_1, h_2 \in H$, avem:

$$h_1h_2 = x(h_1h_2)^{-1}x^{-1} = xh_2^{-1}h_1^{-1}x^{-1} = xh_2^{-1}x^{-1} \cdot xh_1^{-1}x^{-1} = h_2h_1.$$

Grupul $(H, \cdot)$ este deci comutativ. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **3p**

**Problema 3.** Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ definim

$$I_n = \int_0^{\pi} \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \ldots \cdot \cos(nx)\, dx.$$

Să se determine valorile lui $n$ pentru care $I_n = 0$.

*Soluţie.* Prin inducţie după $n \in \mathbb{N}^*$ avem că

$$\cos(x)\cdot\cos(2x)\cdot\ldots\cdot\cos(nx) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum \cos(x \pm 2x \pm \ldots \pm nx)\,, \qquad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*,$$

suma efectuându-se după toate alegerile semnelor $\pm$. .............................. **2p**
Atunci

$$I_n = \int_0^\pi \cos(x)\cdot\cos(2x)\cdot\ldots\cdot\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2^{n-1}}\sum\int_0^\pi \cos(x\cdot(1\pm2\pm\ldots\pm n))\,dx = \frac{k_n}{2^{n-1}}\cdot\pi,$$

unde $k_n$ este numărul sumelor $1\pm2\pm\ldots\pm n$ egale cu 0. ............................ **3p**
Prin urmare, $I_n = 0 \Longleftrightarrow k_n = 0$.
Orice sumă $1\pm2\pm\ldots\pm n$ are aceeaşi paritate ca $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Dacă $n \equiv 1 \pmod 4$ sau $n \equiv 2 \pmod 4$ aceasta este impară, şi deci $k_n = 0$.
Pentru $n \equiv 3 \pmod 4$ avem

$$(1+2-3)+(4-5-6+7)+\ldots+((n-3)-(n-2)-(n-1)+n) = 0,$$

astfel că $k_n \geq 1$.
Pentru $n \equiv 0 \pmod 4$ avem

$$(1-2-3+4)+(5-6-7+8)+\ldots+((n-3)-(n-2)-(n-1)+n) = 0,$$

astfel că $k_n \geq 1$. ................................................................ **1p**
Mulţimea $S$ a numerelor căutate este deci

$$S = 4\mathbb{N} + \{1, 2\}.$$

........................................................................................ **1p**

**Problema 4.** Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis şi $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie strict monotonă. Demonstraţi că pentru orice $c \in I$ există $a, b \in I$ astfel încât $c \in (a, b)$ şi

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a).$$

*Soluţie.* Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că funcţia $f$ este strict crescătoare(în caz contrar putem înlocui $f$ cu $f_1 = -f$).
Egalitatea

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a).$$

se transcrie echivalent

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-c+c-a) \Longleftrightarrow \int_c^b (f(x)-f(c))\,dx = \int_a^c (f(c)-f(x))\,dx.$$

........................................................................................ **2p**
Pentru $c \in I$ oarecare fixat considerăm funcţiile

$$g : (-\infty, c] \cap I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = \int_t^c (f(c)-f(x))\,dx,$$

respectiv

$$h : [c, \infty) \cap I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) = \int_c^t (f(x) - f(c))\, dx.$$

Aceste funcţii sunt continue, şi datorită monotoniei funcţiei $f$, $Im(g), Im(h) \subseteq [0, \infty)$. ........................................................................................ **2p**
Deoarece intervalul $I$ este deschis există $r > 0$ astfel încât $[c - r, c + r] \subseteq I$. Atunci $g([c - r, c]) = [0, g(c - r)]$ şi $h([c, c + r]) = [0, h(c + r)]$. ............................ **1p**
Ca funcţii continue, $g$ şi $h$ au proprietatea valorilor intermediare ("a lui Darboux" - observaţie: termen folosit doar în România!), pentru un număr oarecare $\lambda$ cu proprietatea că $0 < \lambda < min(g(c - r), h(c + r))$ există $a \in (c - r, c)$ şi $b \in (c, c + r)$ astfel încât $g(a) = \lambda = h(b)$, ceea ce demonstrează afirmaţia enunţată. ........................... **2p**