MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2022

CLASA a IX-a – soluții

Problema 1. Considerăm o funcție $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că

$$\frac{x^3+3x^2f(y)}{x+f(y)}+\frac{y^3+3y^2f(x)}{y+f(x)}=\frac{(x+y)^3}{f(x+y)},$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $f(1) = 1$.

b) Determinați f.

Gazeta Matematică

Soluție. a) Pentru $x = y = 1$, relația din enunț conduce la $f(2)=\dfrac{4+4f(1)}{1+3f(1)}$ **1p**

Cum $f(2)$ este număr natural, dacă notăm $f(1) = a \in \mathbb{N}^*$, deducem că $1 + 3a \mid 4 + 4a$, deci $1 + 3a \mid 3(4 + 4a) - 4(1 + 3a)$, de unde $1 + 3a \mid 8$. Așadar $1 + 3a$ este unul dintre divizorii lui 8, singura posibilitate fiind $1 + 3a = 4$, deci $f(1) = a = 1$ **2p**

b) Observăm că funcția $f(x) = x,\ x \in \mathbb{N}^*$, verifică relația din enunț deoarece

$$\frac{x^3+3x^2y}{x+y}+\frac{y^3+3y^2x}{y+x}=\frac{(x+y)^3}{x+y}.$$

. . . . **1p**

Arătăm inductiv că $f(n) = n$ pentru orice n natural nenul. Cazul $n = 1$ fiind verificat, presupunem că $f(k) = k$ pentru un anumit k nenul și arătăm că $f(k + 1) = k + 1$. **1p**

Pentru $x = 1$ și $y = k$, din enunț obținem

$$\frac{1+3k}{1+k}+\frac{k^3+3k^2}{k+1}=\frac{(k+1)^3}{f(k+1)} \iff \frac{(k+1)^3}{k+1}=\frac{(k+1)^3}{f(k+1)}.$$

Conchidem că $f(k + 1) = k + 1$, deci $f(n) = n$, pentru orice n natural nenul **2p**

Problema 2. a) Arătați că $2x^3 - 3x^2 + 1 \geqslant 0$, oricare ar fi $x \geqslant 0$.

b) Arătați că, dacă x, y, z sunt numere reale pozitive astfel încât $\dfrac{2}{1+x^3}+\dfrac{2}{1+y^3}+\dfrac{2}{1+z^3}=3$, atunci $\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1-y}{1-y+y^2}+\dfrac{1-z}{1-z+z^2}\geqslant 0$.

Soluție. a) $2x^3 - 3x^2 + 1 = 2x^3 - 2x^2 - x^2 + 1 = (x - 1)(2x^2 - x - 1) = (x - 1)^2(2x + 1)$ și, cum $(x - 1)^2 \geqslant 0$, oricare ar fi x real, iar $2x + 1 \geqslant 0$, oricare ar fi $x \geqslant 0$, rezultă cerința. **3p**

b) Avem de arătat că $\sum \dfrac{1-x^2}{1+x^3} \geqslant 0$ **1p**

Din ipoteză, $\sum \dfrac{1}{1+x^3}=\dfrac{3}{2}$, deci este suficient să arătăm că $\sum \dfrac{x^2}{1+x^3} \leq \dfrac{3}{2}$. **1p**

Din a) rezultă $\dfrac{x^2}{1+x^3} \leqslant \dfrac{2x^3+1}{3(1+x^3)}=\dfrac{1}{3}\left(2-\dfrac{1}{1+x^3}\right)$ și analoagele, iar prin adunare obținem $\sum \dfrac{x^2}{1+x^3} \leqslant 2-\dfrac{1}{3}\sum\dfrac{1}{1+x^3}=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$, ceea ce încheie demonstrația **2p**

Problema 3. a) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $3^x = x + 2$.

b) Determinați perechile (x, y) de numere naturale pentru care $x + 3^y$ și $y + 3^x$ sunt numere întregi consecutive.

Soluție. a) 0 nu este soluție și 1 este soluție **1p**

Arătăm prin inducție că $3^n > n + 2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$. Într-adevăr, pentru $n = 2$ este evident, iar dacă presupunem că pentru un număr $n \geqslant 2$ avem $3^n > n + 2$, atunci $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \geqslant 3(n + 2) = 3n + 6 > n + 3$. Rezultă că ecuația are doar soluția 1 .... **3p**

b) Avem $x \neq y$ și, datorită simetriei, putem analiza doar cazul $x > y$. În acest caz, folosind inegalitatea demonstrată la a),

$$(y + 3^x) - (x + 3^y) = 3^y(3^{x-y} - 1) - (x - y) \geqslant 1 \cdot \big((x - y + 2) - 1\big) - (x - y) = 1. \qquad (*)$$

Rezultă că singura posibilitate ca numerele $x + 3^y$ și $y + 3^x$ să fie consecutive este ca inegalitățile din $(*)$ să fie egalități. Aceasta duce la $3^y = 1$ și $x - y = 1$, de unde $y = 0$, $x = 1$. Din simetrie obținem soluțiile $(1, 0)$ și $(0, 1)$ **3p**

Problema 4. Vom spune că o mulțime de 6 puncte din plan este *partajabilă* dacă putem nota elementele acesteia cu A, B, C, D, E, F astfel încât să obținem triunghiurile ABC și DEF având același centru de greutate.

a) Dați exemplu de mulțime partajabilă.

b) Arătați că, dacă o mulțime plană are cel puțin 7 puncte, atunci ea conține o submulțime de 6 puncte care **nu este** partajabilă.

Soluție. a) Pentru $|M| = 6$, considerăm M ca fiind mulțimea vârfurilor a două triunghiuri echilaterale distincte $A_1A_2A_3$ și $B_1B_2B_3$ înscrise într-un același cerc de centru O; acesta este centrul de greutate comun **1p**

b) Considerăm o origine arbitrară fixată și notăm cu $\overrightarrow{v}_M$ vectorul de poziție al punctului M. Observăm că, dacă triunghiurile XYZ și UVT au același centru de greutate W, atunci $\overrightarrow{v}_X + \overrightarrow{v}_Y + \overrightarrow{v}_Z = 3\overrightarrow{v}_W = \overrightarrow{v}_U + \overrightarrow{v}_V + \overrightarrow{v}_T$ **1p**

Să numim *partaj* cele două triunghiuri având același centru de greutate. Să presupunem că $\{A, B, C, D, E, P\}$ are partajul ABC, DEP, deci $\overrightarrow{v}_A + \overrightarrow{v}_B + \overrightarrow{v}_C = \overrightarrow{v}_D + \overrightarrow{v}_E + \overrightarrow{v}_P$ (*). Dacă mulțimea $M = \{A, B, C, D, E, Q\}$, $Q \neq P$, este partajabilă, partajul nu poate fi ABC, DEQ: ar rezulta $\overrightarrow{v}_A + \overrightarrow{v}_B + \overrightarrow{v}_C = \overrightarrow{v}_D + \overrightarrow{v}_E + \overrightarrow{v}_Q$, de unde, folosind (*), $P = Q$ – fals. Astfel – de exemplu – A, B sunt vârfuri ale unui triunghi al partajului, iar C al celuilalt. Atunci, partajul mulțimii M poate fi doar de forma ABD, CEQ sau ABQ, CDE **1p**

În primul caz obținem $\overrightarrow{v}_A + \overrightarrow{v}_B + \overrightarrow{v}_D = \overrightarrow{v}_C + \overrightarrow{v}_E + \overrightarrow{v}_Q$, de unde obținem, folosind (*), $2(\overrightarrow{v}_C - \overrightarrow{v}_D) = \overrightarrow{v}_P - \overrightarrow{v}_Q$, deci $2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{QP}$, adică $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ (**). Cu un argument similar, în al doilea caz obținem $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{CQ}$, deci $\overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ (***)................................**1p**

Să considerăm acum o mulțime plană cu cel puțin 7 puncte, să alegem o submulțime $\mathcal{S}$ a ei cu 7 elemente și să presupunem că orice submulțime a lui S este partajabilă. Să notăm cu P și Q punctele lui $\mathcal{S}$ pentru care distanța PQ este cea mai mică dintre distanțele dintre două puncte ale lui $\mathcal{S}$ și să notăm A, B, C, D, E celelalte puncte ale lui $\mathcal{S}$. Atunci relațiile (**) și (***) contrazic minimalitatea distanței PQ, deci presupunerea este falsă, q.e.d. **3p**