Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2022

CLASA a VI-a – soluții și bareme

Problema 1. Considerăm numerele naturale $n-1$, $2n-1$ și n^2+3, unde $n \geqslant 3$ este un număr natural.

a) Arătați că există o singură valoare a lui n pentru care toate numerele considerate sunt prime.

b) Arătați că există o infinitate de valori ale lui n pentru care toate numerele considerate sunt compuse.

Gazeta Matematică

Soluție. a) Dacă $n = \mathcal{M}_3$, atunci $n^2+3 = \mathcal{M}_3$ și $n^2+3 > 3$, deci n^2+3 nu este prim . . **1p**

Dacă $n = \mathcal{M}_3 + 2$, atunci $2n-1 = \mathcal{M}_3$ și $2n-1 > 3$, deci $2n-1$ nu este prim **1p**

Dacă $n = \mathcal{M}_3 + 1$ și $n \geqslant 7$, atunci $n-1 = \mathcal{M}_3$ și $n-1 > 3$, deci $n-1$ nu este prim **1p**

Singura posibilitate ca numerele considerate să fie prime este $n = 4$, caz în care obținem numerele prime $3, 7, 19$ **1p**

b) Pentru n impar și $n > 3$, numerele $n-1$ și n^2+3 sunt pare și mai mari decât 2, deci nu sunt prime **1p**

Dacă, în plus, $n = \mathcal{M}_3 + 2$ și $n > 2$, atunci nici $2n-1 = 2(\mathcal{M}_3+2) - 1 = \mathcal{M}_3$ nu este prim. Astfel, pentru $n = \mathcal{M}_6 + 5$ (o infinitate de valori), toate numerele considerate sunt compuse **2p**

Problema 2. Determinați perechile (A, B) de mulțimi care au elementele numere naturale nenule și care verifică simultan următoarele proprietăți:

- fiecare din mulțimile A și B are trei elemente;
- mulțimea $A \cap B$ are exact un element;
- $6 \in A$ și $12 \in B$;
- dacă $x, y \in A$ și $x \neq y$, atunci $x \cdot y \in B$.

Soluție. Fie $A = \{a, b, c\}$, cu $a < b < c$. Atunci $B = \{a \cdot b, a \cdot c, b \cdot c\}$, $a > 1$, iar elementul comun al al mulțimilor A și B nu poate fi decât $c = ab$ **2p**

Dacă $a = 6$, atunci $a \cdot b > 36$, $a \cdot c > 36$, $b \cdot c > 36$, în contradicție cu $12 \in B$ **1p**

Dacă $b = 6$, atunci

- dacă $a \geqslant 3$, obținem o contradicție asemănătoare cu cea precedentă
- dacă $a = 2$, atunci $ab = 12 = c$, $A_1 = \{2, 6, 12\}$ și $B_1 = \{12, 24, 72\}$ **2p**

Dacă $c = 6 = ab$, atunci $a = 2$, $b = 3$, $A_2 = \{2, 3, 6\}$ și $B_2 = \{6, 12, 18\}$. Soluțiile sunt (A_1, B_1) și (A_2, B_2) **2p**

Problema 3. Determinați numerele naturale nenule a, b, c, d pentru care $a \leqslant b \leqslant c$ și

$$2^a + 2^b + 2^c = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot d.$$

Soluție. Fie (a, b, c, d) o soluție. Rezultă $2^a + 2^b + 2^c \geqslant 6$, deci $d \geqslant 3$ **1p**

Deducem că 3 divide $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot d = 2^a + 2^b + 2^c$ (*). Pentru n număr natural avem $2^n = \mathcal{M}_3 + 1$ sau $2^n = \mathcal{M}_3 + 2$, după cum n este par sau impar. Astfel, relația (*) este posibilă doar dacă a, b, c au aceeași paritate **2p**

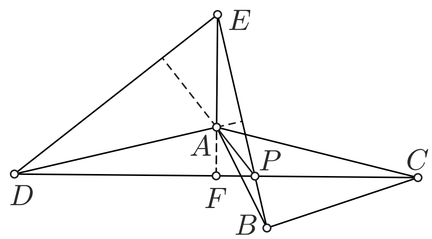
Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci ultima cifră a lui 2^n este 4 sau 6, dacă n este par și 2 sau 8, dacă n este impar. Astfel, ultima cifră a numărului $2^a + 2^b + 2^c$ nu poate fi 0, deci $d \leqslant 4$ **2p**

Pentru $d = 3$ obținem soluția $(1, 1, 1, 3)$, iar pentru $d = 4$ obținem soluțiile $(2, 2, 4, 4)$ și $(3, 3, 3, 4)$ **2p**

Problema 4. Considerăm triunghiul ABC cu unghiul $\angle BAC$ ascuțit. Construim în exteriorul triunghiului punctele D și E astfel încât $AD = AC$, $AE = AB$, D și B sunt de aceeași parte a dreptei AC, E și C sunt de aceeași parte a dreptei AB și $\angle DAC = \angle BAE = 120^\circ + \frac{2}{3}\angle BAC$. Fie P intersecția dreptelor BE și CD. Demonstrați că:

a) dreptele AE și CD sunt perpendiculare;

b) dreptele PA și DE sunt perpendiculare.



Soluție. Fie $\{F\} = AE \cap CD$ și $\angle BAC = 3a$, deci $\angle DAC = \angle BAE = 120^\circ + 2a$.

a) $\angle ACF = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DAC) = \frac{1}{2}(180^\circ - (120^\circ + 2a) = 30^\circ - a$ **1p**

$\angle CAE = \angle BAE - \angle BAC = 120^\circ + 2a - 3a = 120^\circ - a$, deci $\angle CAF = 180^\circ - \angle CAE = 180^\circ - (120^\circ - a) = 60^\circ + a$ **1p**

$\angle AFC = 180^\circ - \angle CAF - \angle ACF = 90^\circ$, deci $EA \perp CD$ **1p**

b) Avem analog $DA \perp BE$ (schimbăm $D \longleftrightarrow E$ și $C \longleftrightarrow B$) **2p**

Din relațiile $EA \perp PD$ și $DA \perp PE$ rezultă că A este ortocentrul triunghiului PDE, deci $PA \perp DE$ **2p**