Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a V-a – soluții și bareme

Problema 1. Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{abcd}$, știind că numerele $\overline{ab}, \overline{cb}$ și d sunt prime, iar $\overline{ab}^2 + \overline{cb}^2 + d^2 = 2022$.

Gazeta Matematică

Soluție. Fiind prime, numerele $\overline{ab}$ și $\overline{cb}$ sunt impare. Ca urmare, $\overline{ab}^2 + \overline{cb}^2$ este număr par și, cum 2022 este par, rezultă că d este par. Dar d este număr prim, deci $d = 2$. **2p**

Relația din enunț devine $\overline{ab}^2 + \overline{cb}^2 = 2018$. Deoarece $47^2 = 2209 > 2018$, deducem că numerele $\overline{ab}$ și $\overline{cb}$ pot fi cel mult egale cu 43. .... **1p**

Cei doi termeni din suma $\overline{ab}^2 + \overline{cb}^2$ au aceeași ultimă cifră, aceasta fiind impară, iar ultima cifră a sumei este 8. Obținem că b poate fi 3 sau 7. .... **1p**

Pentru $b = 7$, numerele prime $\overline{ab}$ și $\overline{cb}$ pot lua doar valorile 17 sau 37. Cum $17^2 = 289$, iar $37^2 = 1369$, suma $\overline{a7}^2 + \overline{c7}^2$ nu poate fi egală cu 2018. .... **1p**

Pentru $b = 3$, numerele prime $\overline{ab}$ și $\overline{cb}$ pot lua valorile 13, 23 sau 43. Cum $13^2 = 169$, $23^2 = 529$ și $43^2 = 1849$, egalitatea $\overline{ab}^2 + \overline{cb}^2 = 2018$ are loc doar pentru $\overline{ab} = 13$ și $\overline{cb} = 43$ sau $\overline{ab} = 43$ și $\overline{cb} = 13$. Așadar, problema are două soluții: $\overline{abcd} = 1342$ și $\overline{abcd} = 4312$. **2p**

Problema 2. Un magazin a vândut 235 de roboți în cele 12 luni ale unui an. În fiecare lună au fost vânduți fie câte 16, fie câte 20, fie câte 25 de roboți. Determinați numărul de luni în care au fost vânduți exact 20 de roboți.

Soluție. În fiecare dintre cele 12 luni ale anului s-au vândut cel puțin câte 16 roboți. Dacă în fiecare lună s-ar fi vândut exact câte 16 roboți, atunci numărul de roboți vânduți ar fi fost egal cu $12 \cdot 16 = 192$ **2p**

Diferența de $235 - 192 = 43$ de roboți provine din lunile în care s-au vândut câte 20 de roboți (deci câte 4 în plus) și din lunile în care s-au vândut câte 25 de roboți (deci câte 9 în plus).

Notând cu a numărul de luni în care s-au vândut câte 20 roboți și cu b numărul de luni în care s-au vândut câte 25 de roboți, obținem $4 \cdot a + 9 \cdot b = 43$ **2p**

Rezultă $b \leqslant 4$ și b impar, deci $b = 1$ sau $b = 3$. **1p**

Dacă $b = 1$, atunci $4 \cdot a = 34$, imposibil. **1p**

Dacă $b = 3$, atunci $a = 4$, deci numărul de luni în care au fost vânduți câte 20 de roboți este egal cu 4 .... **1p**

Soluție alternativă 1. Fie x, y, z numărul lunilor în care s-au vândut câte 16, 20 respectiv 25 de roboți. Atunci $16x + 20y + 25z = 235$, adică $x + 5(3x + 4y + 5z) = 235$, de unde rezultă că $x = 5 \cdot [47 - (3x + 4y + 5z)]$. Ca urmare, x este divizibil cu 5 .... **4p**

Cum $x \leqslant 12$ (x este un număr de luni), obținem $x = 5$ sau $x = 10$ **1p**

Pentru $x = 10$, rezultă $16 \cdot 10 + 20y + 25z = 235$, de unde $4y + 5z = 15$ sau $4(y + z) + z = 15$. Cum $y + z = 12 - x = 2$, obținem $z = 7$, imposibil, deoarece $y + z = 2$ **1p**

Pentru $x = 5$, rezultă $16 \cdot 5 + 20y + 25z = 235$, de unde $4y + 5z = 31$ sau $4(y + z) + z = 31$. Cum $y + z = 12 - x = 7$, obținem $z = 3$, de unde $y = 7 - z = 4$, deci numărul de luni în care au fost vânduți câte 20 de roboți este egal cu 4 .... **1p**

Soluție alternativă 2. Fie x, y, z numărul lunilor în care s-au vândut câte 16, 20 respectiv 25 de roboți. Atunci $16x + 20y + 25z = 235$, de unde rezultă z impar și $z \leqslant 9$ **2p**

Dacă z este unul dintre numerele 1, 5 sau 9, din relația $16x + 20y = 235 - 25z$ obținem că $16x + 20y$ este egal cu 210, 110, respectiv 10, dar $16x + 20y$ este divizibil cu 4, iar 210, 110 și 10 nu sunt, deci nu se obțin soluții **3p**

Pentru $z = 7$, avem $16x+20y = 60$ și $x+y = 5$, de unde obținem $4x+5y = 15$ și $4x+4y = 20$, contradicție **1p**

Pentru $z = 3$, avem $16x + 20y = 160$ și $x + y = 9$, de unde obținem $4x + 5y = 40$ și $4x + 4y = 36$, deci $y = 4$ (și $x = 5$). Așadar, numărul de luni în care au fost vânduți câte 20 de roboți este egal cu 4 .... **1p**

Problema 3. Se spune că 13 numere naturale nenule formează un grup *deosebit* dacă numerele grupului sunt consecutive. Determinați:

a) câte grupuri deosebite au suma numerelor egală cu un pătrat perfect de trei cifre;

b) numărul maxim de numere prime aflate într-un grup deosebit.

Soluție. a) Notăm cu $a, a+1, a+2, \ldots, a+12$ cele 13 numere consecutive care formează un grup deosebit. Atunci suma lor este $13a + 78 = 13 \cdot (a+6)$. **1p**

Cum cel mai mare pătrat perfect de trei cifre este 961, iar numărul $13 \cdot (a+6)$ este divizibil cu 13, deducem că valoarea lui $13 \cdot (a+6)$ poate fi 169 sau 676, acestea fiind singurele pătrate perfecte de trei cifre divizibile cu 13. .... **1p**

Obținem că a poate fi 7 sau 46. În concluzie există două grupuri deosebite având proprietatea cerută. **1p**

b) Pentru $a = 1$, în grupul deosebit $1, 2, 3, \ldots, 13$ se află 6 numere prime, iar pentru $a = 2$, în grupul deosebit $2, 3, 4, \ldots, 14$ se află tot 6 numere prime. **2p**

Dacă $a \geqslant 3$, printre cele 13 numere ale grupului deosebit se află cel puțin 6 numere pare neprime. De asemenea, cum în grup se află cel puțin trei numere impare consecutive mai mari decât 3, unul dintre ele este divizibil cu 3, deci nu este prim. Deducem că în grup vor fi cel mult 6 numere prime. Astfel, numărul maxim de numere prime este 6. .... **2p**

Problema 4. Se scriu pe tablă, unul după altul, toate numerele naturale de la 1 la 30000, formând o secvență lungă de cifre:

$$123456789101112\ldots30000.$$

De câte ori apare 2023 în această secvență?

Soluție. Secvența 2023 apare în scrierea numerelor $2023, 12023, 22023$ și a numerelor 20230, 20231, 20232, ..., 20239, în total fiind 13 apariții. **3p**

În plus, 2023 mai poate apărea *lipind* sfârșitul unui număr de începutul numărului următor. Avem cazurile:

- 202|3 apare o singură dată: 3202|3203. .... **1p**
- 20|23, va apărea de 11 ori: 2320|2321 și de la 23020|23021 la 23920|23921 .... **2p**

Cazul 2|023 este imposibil deoarece nu există număr care să înceapă cu 0, deci numărul total de apariții este $13 + 11 + 1 = 25$. **1p**