Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a XII-a – soluții

Problema 1. Fie $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă cu proprietatea că

$$(f''(x) - f(x)) \cdot \operatorname{tg}(x) + 2 \cdot f'(x) \geq 1\,, \qquad \text{pentru orice } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Arătați că

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \sin(x)\, dx \geq \pi - 2\,.$$

Gazeta Matematică

Soluție. Deoarece $\cos(x) > 0$ pentru orice $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, inegalitatea din ipoteză se transcrie echivalent

$$(f''(x) - f(x)) \cdot \sin(x) + 2 \cdot f'(x) \cdot \cos(x) \geq \cos(x)\,, \qquad \text{pentru orice } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

.... **1p**

sau, $g''(x) \geq 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, unde $g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ este funcția definită prin
$g(x) = f(x) \cdot \sin(x) + \cos(x)$, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. **2p**

Prin urmare, funcția g este convexă, astfel că

$$\frac{g(x) + g(-x)}{2} \geq g(0) = 1\,, \qquad \text{pentru orice } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

.... **1p**

Deoarece $\int_{-a}^{a} h(x)\, dx = \int_{-a}^{a} h(-x)\, dx$ are loc pentru orice funcție integrabilă și orice $a \geq 0$, avem

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{g(x) + g(-x)}{2}\, dx \geq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = \pi$$

.... **2p**

Dar atunci

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \sin(x)\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (g(x) - \cos(x))\, dx \geq \pi - 2\,. \qquad \square$$

.... **1p**

Problema 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e, iar H și K două subgrupuri proprii ale lui G, cu proprietatea că $H \cap K = \{e\}$ și că $(G \setminus (H \cup K)) \cup \{e\}$ este parte stabilă în raport cu operația din G. Arătați că $x^2 = e$ pentru orice $x \in G$.

Soluție. Fie $L = (G \setminus (H \cup K)) \cup \{e\}$. Deoarece $x \in H \cup K \iff x^{-1} \in H \cup K$, rezultă că $x \in L \iff x^{-1} \in L$, astfel că L este un subgrup propriu al lui G **1p**

În plus, $L \cap H = L \cap K = H \cap K = \{e\}$, ... **1p**

$G = H \cup K \cup L$ și rezultă că pentru orice permutare $\{A, B, C\} = \{H, K, L\}$, dacă $a \in A \setminus \{e\}$ și $b \in B \setminus \{e\}$, atunci $ab \in C \setminus \{e\}$. **2p**

Atunci, în aceleași condiții ca mai sus, $a^2b = a(ab) \in B \setminus \{e\}$, astfel că $a^2 \in A \cap B = \{e\}$. . . **1p**
Prin urmare, $x^2 = e$ pentru orice $x \in G \setminus \{e\}$. **1p**
Cum $e^2 = e$, rezultă că $x^2 = e$ pentru orice $x \in G$. **1p**

Problema 3. Fie $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă.
a) Arătați că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)\, dx = f(0)\,.$$

b) Dacă $f(0) = 0$ și f este derivabilă la dreapta în 0, arătați că limitele

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{f(x)}{x}\, dx \qquad \text{și} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \int_0^1 f(x^n)\, dx \right)$$

există, sunt finite și egale.

Soluție. a) Din continuitatea funcției f rezultă că f este mărginită, cu $Im(f) \subseteq [-M, M]$, unde $M > 1$, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încât $|f(x) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x \in [0, \delta]$, și pentru orice $x \in [0, 1 - \frac{\varepsilon}{4M}]$ există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^n \in [0, \delta], \forall n \geq n_0$. Atunci

$$\left| \int_0^1 f(x^n)\, dx - f(0) \right| \leq \int_0^1 |f(x^n) - f(0)|\, dx =$$

$$= \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{4M}} |f(x^n) - f(0)|\, dx + \int_{1-\frac{\varepsilon}{4M}}^1 |f(x^n) - f(0)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{4M}\right) + \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M < \varepsilon\,,$$

pentru orice $n \geq n_0$. Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)\, dx = f(0)\,.$$

. . . . **2p**
b) Deoarece f este derivabilă în 0, funcția $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & , \text{ dacă } x > 0, \\ f'(0) & , \text{ dacă } x = 0, \end{cases}$$

este continuă. **1p**
Fie G o primitivă a sa. Atunci

$$\int_\varepsilon^1 \frac{f(x)}{x}\, dx = \int_\varepsilon^1 g(x)\, dx = G(1) - G(\varepsilon),$$

și

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{f(x)}{x}\, dx = G(1) - G(0).$$

. . . . **2p**
De asemenea,

$$n \cdot \int_0^1 f(x^n)\, dx = n \cdot \int_0^1 x^n g(x^n)\, dx = \int_0^1 x \cdot (nx^{n-1}) g(x^n)\, dx =$$

$$= x \cdot G(x^n)\Big|_0^1 - \int_0^1 G(x^n)\,dx = G(1) - \int_0^1 G(x^n)\,dx.$$

Conform punctului a) rezultă atunci că

$$\lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \int_0^1 f(x^n)\,dx\right) = G(1) - G(0),$$

și afirmația din enunț este demonstrată. **2p**

Problema 4. Pe mulțimea $A = [0, \infty)$ a numerelor reale nenegative se consideră trei funcții $f, g, h : A \longrightarrow A$ și operația binară $* : A \times A \longrightarrow A$, definită prin

$$x * y = f(x) + g(y) + h(x) \cdot |x - y|, \qquad \text{pentru orice } x, y \geq 0.$$

Dacă $(A, *)$ este un monoid comutativ,
a) arătați că funcția h este continuă pe A;
b) determinați funcțiile f, g, h.

Soluție. a) Fie e elementul neutru al monoidului $(A, *)$. Atunci

$$f(0) + g(e) + h(0) \cdot e = 0 * e = 0 \qquad \text{și} \qquad f(e) + g(0) + h(e) \cdot e = e * 0 = 0\,,$$

astfel că $f(e) = g(e) = f(0) = g(0) = h(e) \cdot e = h(0) \cdot e = 0$, de unde $e = e * e = f(e) + g(e) = 0$.
.... **1p**
Atunci $0 * x = x$ și $x * 0 = x$ pentru orice $x \geq 0$, de unde obținem că

$$f(0) + g(x) + h(0) \cdot x = x\,, \qquad \text{și} \qquad f(x) + g(0) + h(x) \cdot x = x,$$

astfel că $f(x) = x(1 - h(x))$ și $g(x) = x(1 - h(0))$ pentru orice $x \geq 0$. Cum $f(x), g(x) \geq 0$, rezultă că $h(x) \in [0, 1], \forall x \geq 0$. **1p**
Avem atunci că

$$x * y = x + y - x \cdot h(x) - y \cdot h(0) + h(x) \cdot |x - y|\,, \quad \forall x, y \geq 0.$$

Din comutativitatea operației " $*$ " rezultă atunci că

$$xh(x) - yh(y) = h(0)(x - y) + (h(x) - h(y)) \cdot |x - y|\,, \quad \forall x, y \geq 0.$$

.... **1p**
Cum h este mărginită, rezultă că $\lim_{x\to y} xh(x) = yh(y)$ pentru orice $y \geq 0$, astfel că funcția $p : A \longrightarrow A$, $p(x) = xh(x)$, este continuă. Dar atunci h este continuă pe $(0, \infty)$. **1p**
De asemenea, pentru orice $y > 0$ avem că

$$\lim_{x\to y} \frac{p(x) - p(y)}{x - y} = h(0)\,,$$

astfel că există $a = h(0)$ și $b \geq 0$ astfel încât $p(y) = ay + b = h(0)y + b, \forall y > 0$. Atunci $b = \lim_{y\to 0} p(y) = p(0) = 0$. Dar atunci $yh(y) = p(y) = yh(0)$ pentru orice $y > 0$ și rezultă că

$h(y) = h(0)$, $\forall y > 0$. Funcția h este deci constantă, deci continuă. **1p**
b) Fie $k = h(0)$. Atunci $h(x) = k$ și $f(x) = g(x) = x(1-k)$, pentru orice $x \geq 0$, și
$x * y = (x+y)(1-k) + k|x-y|$, $\forall x, y \geq 0$. Atunci $(1*1)*2 = 1*(1*2) \Longrightarrow k(4k-2) = 0$,
astfel că $k \in \{0, \frac{1}{2}\}$. **1p**
Pentru $k = 0$ avem că $f = g = id_A$ și $x * y = x + y$, $\forall x, y \geq 0$.
Pentru $k = \frac{1}{2}$ avem că $f(x) = g(x) = \frac{x}{2}, \forall x \geq 0$ și $x * y = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2} = \max(x, y)$, $\forall x, y \geq 0$
. . . . **1p**