Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a X-a – soluții

Problema 1. Determinați toate soluțiile reale ale ecuației

$$2^{x-1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 3.$$

Supliment Gazeta Matematică

Soluție. Observăm că $x > 0$. Ecuația inițială este echivalentă cu $2^x + 2 \cdot 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 6$. Conform inegalității mediilor obținem:

$$2^x + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2^x \cdot 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}} = 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)},$$

pentru orice $x > 0$. **2p**

Dar $\frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) \geq \sqrt[3]{x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$, care conduce la $2^x + 2 \cdot 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \geq 6$. **2p**

Așadar, avem nevoie de egalitate peste tot. Egalitatea în ambele cazuri se obține când $x = \frac{1}{\sqrt{x}}$, adică $x = 1$, aceasta fiind unica soluție a acestei ecuații. **3p**

Notă: Nu se va acorda mai mult de **1 punct** pentru simpla enunțare a faptului că doar $x = 1$ este soluție.

Problema 2. Pe arcul mic AB al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC se consideră punctul N astfel încât măsura arcului NB este $30°$. Din punctul N se duc perpendiculare pe latura AC, respectiv AB. Acestea intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC în punctele M, respectiv I.

a) Demonstrați că triunghiul IMN este echilateral.

b) Dacă H_1, H_2 și H_3 reprezintă ortocentrele triunghiurilor NAB, IBC, respectiv CAM, demonstrați că triunghiul $H_1H_2H_3$ este echilateral.

Soluție. a) Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Fără a pierde generalitatea, putem presupune că $O(0)$, iar vârfurile triunghiului ABC sunt $A(1)$, $B(\varepsilon)$ și $C(\varepsilon^2)$, unde $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Deoarece măsura arcului NB este de $30°$, avem $AO \perp ON$, deci N va avea afixul i. Din condiția $NI \perp AB$ rezultă că există $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ astfel încât:

$$\frac{i - z_I}{1 - \varepsilon} = i\alpha \Rightarrow z_I = i - \frac{3}{2}i\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha,$$

unde z_I este afixul punctului I. Din condiția $|z_I| = 1$ obținem $\alpha = 1$, adică I este de afix $i\varepsilon$. În mod analog, din $MN \perp AC$ obținem că M este de afix $i\varepsilon^2$, de unde rezultă că triunghiul IMN este echilateral. **3p**

b) Din relația lui Sylvester avem că afixele ortocentrelor sunt date de $z_{H_1} = z_A + z_N + z_B = i + 1 + \varepsilon$, $z_{H_2} = z_B + z_M + z_C = \varepsilon + i\varepsilon + \varepsilon^2 = \varepsilon z_{H_1}$ și $z_{H_3} = z_C + z_I + z_A = \varepsilon^2 + i\varepsilon^2 + 1 = \varepsilon^2 z_{H_1}$, de unde rezultă că triunghiul $H_1H_2H_3$ este echilateral. **4p**

Notă: Orice soluție în care nu se folosesc numere complexe se punctează echivalent.

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Determinați toate numerele $z \in \mathbb{C}$ pentru care:

$$|z^{n+1} - z^n| \geq |z^{n+1} - 1| + |z^{n+1} - z|.$$

Soluție. Observăm că $z = 1$ e soluție și $z = 0$ nu este soluție. Presupunem în continuare că $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Înmulțind inegalitatea din ipoteză cu $\frac{1}{|z|^{n+1}}$ și, notând $\frac{1}{z} = w$, obținem:

$$|1 - w| \geq \left|1 - w^{n+1}\right| + |1 - w^n| \geq \left|\left(1 - w^{n+1}\right) - (1 - w^n)\right| = |w|^n\, |1 - w|\,,$$

ceea ce conduce la concluzia $|w| \leq 1$. **2p**

Atunci avem $\left|1 - w^{n+1}\right| + |1 - w^n| \geq \left|1 - w^{n+1}\right| + |w|\, |1 - w^n| \geq \left|1 - w^{n+1} - w\,(1 - w^n)\right| = |1 - w|$. Ipoteza conduce la $|w| = 1$ și $|1 - w| = \left|1 - w^{n+1}\right| + |1 - w^n|$. De asemenea, există $s \geq 0$ cu $1 - w^{n+1} = s\left(w^{n+1} - w\right)$. Prin conjugare obținem $1 - \frac{1}{w^{n+1}} = s\left(\frac{1}{w^{n+1}} - \frac{1}{w}\right)$, echivalent cu $w^{n+1} - 1 = s\,(1 - w^n)$. Adunăm cele două relații și obținem $s\left(w^{n+1} - w^n - w + 1\right)$=0, adică $s\,(w^n - 1)\,(w - 1) = 0$. **3p**

Dacă $w^n - 1 = 0$, deducem că $w \in U_n \setminus \{1\}$, iar dacă $s = 0$, obținem $w^{n+1} = 1$, deci $w \in U_{n+1} \setminus \{1\}$. Ținând cont de notațiile și observațiile inițiale, deducem că mulțimea soluțiilor inecuației din enunț este $U_n \cup U_{n+1}$, unde U_n reprezintă mulțimea rădăcinilor de ordin n ale unității. **2p**

Notă: Nu se acordă mai mult de **1 punct** pentru simpla enunțare fără justificare a soluțiilor.

Problema 4. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care:

$$f(xf(x) + f(y)) = f(f(x^2)) + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Soluție. Pentru $x = 0$ obținem $f(f(y)) = f(f(0)) + y$, pentru orice $y \in \mathbb{R}$, adică funcția f este injectivă. **1p**

Apoi pentru $y = 0$ avem $f(xf(x) + f(0)) = f(f(x^2))$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ceea ce, din injectivitatea lui f, conduce la $xf(x) + f(0) = f(x^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **1p**

Pentru $x = 1$ în ultima relație avem $f(0) = 0$, de unde ultima relație este echivalentă cu $xf(x) = f(x^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, iar prima relație devine $f(f(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **1p**

Trecând $x \to f(x)$ în relația de mai sus, obținem $f(f(x)^2) = f(f(x))f(x) = xf(x) = f(x^2)$, de unde, folosind injectivitatea lui f, obținem $f(x)^2 = x^2$, adică pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f(x) = x$ sau $f(x) = -x$. **1p**

Dacă prin absurd ar exista o pereche $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ astfel încât $f(x) = x$ și $f(y) = -y$, atunci am avea în relația din enunț $f(x^2 - y) = x^2 + y$, adică $x^2 - y = x^2 + y$ sau $x^2 - y = -x^2 - y$, ceea ce conduce la $y = 0$ sau $x = 0$, adică o contradicție. **2p**

Așadar, funcțiile căutate sunt $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ și $f = -\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$. **1p**

Notă: Primul punct din barem se acordă pentu orice modalitate alternativă de a demonstra că f este injectivă.