MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2022

CLASA a XI-a – soluţii şi bareme

Problema 1. *Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că*

$$\inf_{x>a} f(x) = g(a) \text{ şi } \sup_{x<a} g(x) = f(a),$$

oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$. Ştiind că f are proprietatea lui Darboux, arătaţi că funcţiile f şi g sunt continue şi egale.

Gazeta Matematică

Soluţia 1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$. Atunci $\{g(x) | \; x < a\} \subset \{g(x) | \; x < b\}$, de unde $f(a) = \sup\{g(x) | \; x < a\} \leq \sup\{g(x) | \; x < b\} = f(b)$. Rezultă că funcţia f este monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$. 2p

Cum f este monotonă şi are proprietatea lui Darboux, rezultă că f este o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$. 2p

Fie $a \in \mathbb{R}$. Avem $g(a) = \inf\limits_{x>a} f(x) = \lim\limits_{x \searrow a} f(x) = f(a)$. Rezultă $f = g$. 3p

Soluţia 2. Presupunem, prin reducere la absurd, că există $a \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(a) \neq g(a)$. Dacă $f(a) < g(a)$, alegem $b \in (a, \infty)$. Din $\inf\limits_{x>a} f(x) = g(a)$, rezultă $g(a) \leq f(b)$. Fie $\lambda \in (f(a), g(a)) \subset (f(a), f(b))$. Cum f are proprietatea lui Darboux, există $c \in (a, b)$ astfel ca $f(c) = \lambda < g(a)$, în contradicţie cu $\inf\limits_{x>a} f(x) = g(a)$. 2p

Dacă $f(a) > g(a)$, atunci din condiţia $\sup\limits_{x<a} g(x) = f(a)$ deducem că există $b < a$ astfel ca $g(b) > g(a)$, iar din condiţia $\inf\limits_{x>a} f(x) = g(a)$ rezultă că există $c > a$ astfel ca $f(c) < g(b)$, în contradicţie cu $\inf\limits_{x>b} f(x) = g(b)$. 2p

Rezultă că $f(x) = g(x), \; \forall \, x \in \mathbb{R}$, deci $f = g$.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$. Din $f(a) = g(a) = \inf\limits_{x>a} f(x)$ rezultă $f(a) \leq f(b)$. Atunci f este o funcţie monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$. Cum f este monotonă şi are proprietatea lui Darboux, rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$. 3p

Problema 2. *Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel ca $A^2 + B^2 = O_3$. Arătaţi că $\det(aA + bB) = 0$, pentru oricare numere reale a şi b.*

Soluţie. Din ipoteză rezultă $A^2 = -B^2$. Atunci

$$(\det(A))^2 = \det(A^2) = \det(-B^2) = (-1)^3 \det(B^2) = -(\det(B))^2.$$

Cum $\det(A), \det(B) \in \mathbb{R}$, obţinem $\det(A) = \det(B) = 0$. 2p

Avem

$$(A+B)^2+(A-B)^2 = (A^2+AB+BA+B^2)+(A^2-AB-BA+B^2) = 2(A^2+B^2) = O_3.$$

Repetând raţionamentul anterior, obţinem $\det(A+B)=\det(A-B)=0$. 2p
Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\det(xA+yB),\ \forall\, x,y\in\mathbb{R}$.
Există $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ astfel ca:
$f(x,y)=\det(A)x^3+\alpha x^2y+\beta xy^2+\det(B)y^3=\alpha x^2y+\beta xy^2,\ \forall\, x,y\in\mathbb{R}$. 2p
Apoi, $\alpha+\beta=f(1,1)=\det(A+B)=0$ şi $-\alpha+\beta=f(1,-1)=\det(A-B)=0$, de unde $\alpha=\beta=0$. Rezultă $\det(aA+bB)=f(a,b)=0,\ \forall\, a,b\in\mathbb{R}$. 1p

Problema 3. *Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit în mod recurent prin $x_1=1$ şi*

$$x_{n+1}=\frac{x_1}{n+1}+\frac{x_2}{n+2}+\ldots+\frac{x_n}{2n},$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Considerăm şirul $(y_n)_{n\geq 1}$, cu $y_n=\dfrac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Arătaţi că:

a) $x_{n+1}^2<\dfrac{y_n}{2}$ *şi* $y_{n+1}<\dfrac{2n+1}{2n+2}\,y_n$*, pentru orice* $n\in\mathbb{N}^*$*;*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

Soluţie.
a) Aplicând inegalitatea Cauchy-Schwarz, obţinem:

$$x_{n+1}^2\leq\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right]<$$

$$<ny_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)(n+k-1)}=ny_n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\right)=\frac{y_n}{2},$$

deci $x_{n+1}^2<\dfrac{y_n}{2}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. 3p

Rezultă $(n+1)y_{n+1}-ny_n=x_{n+1}^2<\dfrac{y_n}{2}$, de unde $y_{n+1}<\dfrac{2n+1}{2n+2}\,y_n$, pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$. 1p
b) Avem $y_1=1$ şi

$$0<y_n=y_1\prod_{k=1}^{n-1}\frac{y_{k+1}}{y_k}<\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{2k+2}<\prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{2k+1}{2k+3}}=\sqrt{\frac{3}{2n+1}},\ \forall\, n>1.$$

. . . . 2p
Atunci, pe baza criteriului cleşte, rezultă limitele $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. 1p

Problema 4. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, unde $n \geq 2$. Notăm cu m numărul de elemente ale mulţimii $\left\{\operatorname{rang}(A^k) - \operatorname{rang}(A^{k+1}) \mid k \in \mathbb{N}^*\right\}$. Arătaţi că $n \geq \dfrac{m(m+1)}{2} - 1$.*

Soluţie. Notăm $a_k = \operatorname{rang}(A^k) - \operatorname{rang}(A^{k+1}),\ k \in \mathbb{N}^*$, şi $M := \{a_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$
Dacă $\operatorname{rang}(A) = n$, atunci $M = \{0\}$, deci $m = 1$. Inegalitatea este verificată. 1p
Presupunem $\operatorname{rang}(A) \leq n-1$. Deoarece $\operatorname{rang}(A^{k+1}) = \operatorname{rang}(A^k \cdot A) \leq \operatorname{rang}(A^k),\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*$, avem $a_k \in \{0, 1, \ldots, n-1\},\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*$. 1p
Deducem că există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, unde numerele naturale $a_1, a_2, \ldots, a_p$ nu sunt neapărat distincte. Cum M are m elemente, avem

$$\operatorname{rang}(A) \geq \operatorname{rang}(A) - \operatorname{rang}(A^{p+1}) = \sum_{k=1}^{p} a_k \geq 0 + 1 + \ldots + (m-1) = \frac{m(m-1)}{2}. \quad (1)$$

.... 2p
Fie $a_q = \max M \geq m - 1$, unde $q \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Aplicând inegalitatea lui Sylvester, obţinem

$$\operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(A^q) - n \leq \operatorname{rang}(A^{q+1}).$$

Rezultă

$$m - 1 \leq a_q = \operatorname{rang}(A^q) - \operatorname{rang}(A^{q+1}) \leq n - \operatorname{rang}(A). \quad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă $\dfrac{m(m-1)}{2} \leq \operatorname{rang}(A) \leq n - m + 1$, de unde concluzia. 3p

Remarcă. Fie un număr natural $m \geq 2$ şi $n = \dfrac{m(m+1)}{2} - 1$. Definim matricea Jordan $A = \operatorname{diag}(J_2, J_3, \ldots, J_m) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, unde $J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_i(\mathbb{C})$. Atunci mulţimea $\left\{\operatorname{rang}(A^k) - \operatorname{rang}(A^{k+1}) \mid k \in \mathbb{N}^*\right\}$ are exact m elemente.